Álgebra Lineal I

Matías Carrasco Jiménez y Victor Ortega Le Hénanff
Facultad de Economía de la Universidad Nacional Autónoma de México

4 de enero de 2025

Índice general

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.1. Preámbulo

Las siguientes son notas de clase del curso de Algebra Lineal I del Dr. Leobardo Fernández Román y la profesora Victoria Alejandra García Ortega, impartido en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, en el semestre 2024-2 (verano).

1.2. Campos ($\mathbb{K}$)

Definición 1.1. *Un campo es un conjunto $\mathbb{K}$ con dos operaciones, suma y producto:*

- $\oplus : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*;* $(a, b) \to a + b$
- $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$*;* $(a, b) \to a \cdot b$

$\forall a, b, c... \in \mathbb{K}$ *se satisfacen los siguientes axiomas (12 en total). cinco aditivos, cinco multiplicativos y dos distributivos).*

Axioma 1.2.1 (*Cerradura aditiva*)**.** $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b \in \mathbb{K}$

Axioma 1.2.2 (*Asociatividad aditiva*)**.** $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c$

Axioma 1.2.3 (*Conmutatividad aditiva*)**.** $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a$

Axioma 1.2.4 (*Neutro aditivo*)**.** $\exists 0 \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K}, \ni: a + 0 = 0 + a = a$

Axioma 1.2.5 (*Inverso aditivo*). $\forall a \in \mathbb{K} \exists (-a) \in \mathbb{K}, \ni: a + (-a) = (-a) + a = 0$

Axioma 1.2.6 (*Cerradura multiplicativa*). $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b \in \mathbb{K}$

Axioma 1.2.7 (*Asociatividad multiplicativa*). $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Axioma 1.2.8 (*Conmutatividad multiplicativa*). $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = b \cdot a$

Axioma 1.2.9 (*Neutro multiplicativo*). $\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall a \in \mathbb{K}, \ni: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Axioma 1.2.10 (*Inverso multiplicativo*). $\forall a \in \mathbb{K}, a \neq 0, \exists (a^{-1}) \in \mathbb{K}, \ni: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Axioma 1.2.11 (*Distributivo I*). $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = ab + ac$

Axioma 1.2.12 (*Distributivo II*). $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a + b) \cdot c = ac + ac$

1.3. Espacios vectoriales

Definición 1.2. [1] *Un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto de elementos donde están bien definidas las operaciones de* ***suma vectorial*** *y* ***multiplicación escalar****. Denotamos a todos los elementos de V como* ***vectores*** *y a todos los elementos de $\mathbb{K}$* ***escalares****. Tal que*

- $\oplus : V \times V \to V$
- $\odot : V \times \mathbb{K} \to V$

y que cumple con las siguientes teoremaiedades (cinco aditivas, tres multiplicativas y dos distributivas):

Axioma 1.3.1 (*Cerradura aditiva*). $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V : \vec{v} + \vec{w} \in V$

Axioma 1.3.2 (*Asociatividad aditiva*). $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V : \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z}$

[1] Nótese como todo *campo* es un espacio vectorial, más no todo espacio vectorial es un campo. La multiplicación entre vectores no está definida en sus axiomas. En relación a la definición de $\mathbb{K}$, las diez teoremaiedades de los espacios vectoriales no cuentan con la *conmutatividad multiplicativa* y la existencia de un *inverso multiplicativo*.

Axioma 1.3.3 (*Conmutatividad aditiva*). $\forall\vec{v},\vec{w}\in V:\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$

Axioma 1.3.4 (*Neutro aditivo*). $\exists\vec{0}_V\in V,\forall\vec{v}\in V,\ni:\vec{v}+\vec{0}_V=\vec{0}_V+\vec{v}=\vec{v}$

Axioma 1.3.5 (*Inverso aditivo*). $\forall\vec{v}\in V\exists\vec{x}\in V,\ni:\vec{v}+\vec{x}=\vec{x}+\vec{v}=\vec{0}_V$

Axioma 1.3.6 (*Cerradura multiplicativa*). $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall\vec{v}\in V:\lambda\cdot\vec{v}\in V$

Axioma 1.3.7 (*Asociatividad multiplicativa*). $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall\vec{v}\in V:(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v}=\lambda(\cdot\mu\cdot\vec{v})$

Axioma 1.3.8 (*Neutro multiplicativo*). $1\in\mathbb{K},\forall\vec{v}\in V,\ni:1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Axioma 1.3.9 (*Distributiva I*). $\forall\vec{v},\vec{w}\in V,\forall\lambda\in\mathbb{K}:\lambda\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\cdot\vec{v}+\lambda\cdot\vec{w}$

Axioma 1.3.10 (*Distributiva II*). $\forall\vec{v}\in V,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}:\vec{v}\cdot(\lambda+\mu)=\vec{v}\cdot\lambda+\vec{v}\cdot\mu$

Teorema 1.1. *$\forall\vec{v},\vec{w},\vec{z}\in V$, con V sobre un campo cualquiera $\mathbb{K}$, se cumple que $\vec{v}+\vec{z}=\vec{w}+\vec{z}$, entonces, $\vec{v}=\vec{w}$.*

Demostración. Dado que $\vec{z}\in V$, sabemos, debido al Axioma 1.3.5, que $\exists\vec{u}\in V,\ni\vec{z}+\vec{u}=\vec{0}_V$. De este hecho, y de la utilización de los Axiomas 1.3.3 y 1.3.4, podemos inferir que

$$\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}_V=\vec{v}+(\vec{z}+\vec{u})=(\vec{v}+\vec{z})+\vec{u}=(\vec{w}+\vec{z})+\vec{u}=\vec{w}+(\vec{z}+\vec{u})=\vec{w}+\vec{0}_V=\vec{w}$$

□

Corolario 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial sobre cualquier campo $\mathbb{K}$, $\exists!\vec{0}_V,\forall\vec{v}\in V$.*

Demostración. Sean $\vec{0}_{V1},\vec{0}_{V2}\in V$ dos distintos nuetros aditivos de $\vec{v}\in V$, tal que $\vec{v}+\vec{0}_{V1}=0$ y $\vec{v}+\vec{0}_{V2}=0\Rightarrow\vec{v}+\vec{0}_{V1}=\vec{v}+\vec{0}_{V2}$, por el Teorema 1.1, de la cancelación de vectores, sabemos entonces que $\vec{0}_{V1}=\vec{0}_{V2}$. □

Corolario 1.1.2. *$\forall\vec{v}\in V,\exists!\vec{w}\in V$, tal que, $\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}_V$*

Notación 1.1. *Notación de ahora en adelante: $\forall\vec{v}\in V$, denotamos su inverso aditivo como $-\vec{v}$.*

Demostración. Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V$ dos distintos inversos aditivos de $\vec{v} \in V$, tal que $\vec{v}+\vec{w}_1 = \vec{0}_V$ y $\vec{v}+\vec{w}_2 = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{v}+\vec{w}_1 = \vec{v}+\vec{w}_2$, por el Teorema 1.1, de la cancelación de vectores, sabemos entonces que $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. $\square$

Teorema 1.2. *Sea V cualquier espacio vectorial sobre cualquier campo K, se cumple:*

1. $0\vec{v} = \vec{0}_V$, $\forall \vec{v} \in V$
2. $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V$
3. $\lambda\vec{0}_V = \vec{0}_V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Demostración. (*1.*) Partiendo de $\vec{0}_V\vec{v} = 0$, si sumamos en ambos lados de la igualdad $\vec{0}_V\vec{v}$, se sigue que

$$0\vec{v} + 0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} = 0\vec{v} + \vec{0}_V = \vec{0}_V + 0\vec{v}$$

(*2.*) Por el Teorema 1.1, se sigue entonces que $\vec{0}_V\vec{v} = 0$. Por el Axioma 1.3.5 sabemos que existe el inverso adtivo de todo vector en V, dado que $-(\lambda\vec{v})$ (por el Axioma 1.3.6 de cerradura aditiva)), sabemos que debe existir en V su inverso adtivo. Entonces $\lambda\vec{v} + [-(\lambda\vec{v})] = \vec{0}_V$, si asumimos que $\lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v} = [\lambda + (-\lambda)]\vec{0}_V = \vec{0}_V$, tendríamos:

$$\lambda\vec{v} + [-(\lambda\vec{v})] = 0 = 0\vec{v} = [\lambda + (-\lambda)]\vec{v} = \lambda\vec{v} + (-\lambda)\vec{v}$$

Lo que implica por el Teorema 1.1 que $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v})$.

(*3.*) Sumando $\lambda\vec{0}_V$ en ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\lambda\vec{0}_V + \lambda\vec{0}_V = (\vec{0}_V + \vec{0}_V)\lambda = \vec{0}_V\lambda = \vec{0}_V\lambda + \vec{0}_V = \vec{0}_V + \vec{0}_V\lambda$$

Por el Teorema 1.1, se sigue entonces que $\lambda\vec{0}_V = \vec{0}_V$.

$\square$

1.4. Subespacios vectoriales

Definición 1.3. [2] *Un subconjunto W de V es un subespacio vectorial de V, si W forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones de suma vectorial y producto escalar definidas en V, restringidas a W. Estas condiciones, siendo mejor entendidas como:*

1. $\exists \vec{0}_V \in W$ ***(neutro aditivo en** W**)***
2. $\vec{v} + \vec{w} \in W$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in W$ ***(cerradura aditiva)***
3. $c\vec{v} \in V$, $\forall c \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in W$ ***(cerradura en el producto escalar)***
4. $\forall \vec{v} \in W, \exists \vec{w} \in W, \ni \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}_V$ ***(inverso aditivo en** W**)***

Teorema 1.3. *Sea W un subconjunto del espacio vectorial V, W es un subespacio vectorial de V si se cumplen las siguientes condiciones para las operaciones de suma vectorial y producto escalar definidas en V:*

1. $\vec{0}_V \in W$
2. $\vec{v} + \vec{w} \in W$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in W$
3. $\lambda \vec{v} \in W$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in W$

Demostración. Sea $\vec{0}_{V1} \in W$ un neutro aditivo distinto de $\vec{0}_V \in V$, entonces tendríamos que $\forall \vec{v} \in W$, $\vec{v} + \vec{0}_{V1} = \vec{v}$. Sin embargo, sabemos que $\vec{v} + \vec{0}_V = \vec{v}$. El Teorema 1.1 entonces nos dice que $\vec{0}_{V1} = \vec{0}_V$. Esto contradice la hipótesis inicial de que $\vec{0}_{V1} \neq \vec{0}_V$, lo que nos permite concluir que $\vec{0}_V \in W$ (probando el punto *1.*). Si W es un subespacio de V, entonces W es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas para V (suma vectorial y multiplicación escalar), por lo que las condiciones *2.* y *3.* se cumplen. □

Teorema 1.4. *Sea un V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W_1 \leq V$ y $W_2 \leq V$ subespacios de $V \Rightarrow W_1 \cup W_2 \leq V \iff W_1 \subseteq W_2$ ó $W_2 \subseteq W_1$.*

[2] Si definieramos un espacio vectorial H, donde $H = \{\vec{0}_V\}$, veríamos entonces que este cumple con los Axiomas 1.3.1-1.3.10. Dado que en todo espacio vectorial $V, \exists \vec{0}_V \in V, \forall \vec{v} \in V$, podemos inferir que en todo espacio vectorial existe cuando menos un subespacio vectorial: **el espacio vectorial del vector cero**.

Demostración. (⇒) Sean $\vec{w}_1 \in W_1$ y $\vec{w}_2 \in W_2$, tal que $\vec{w}_1 \notin W_2$ y $\vec{w}_2 \notin W_1$, por demostrar que $(W_1 \subseteq W_2) \vee (W_2 \subseteq W_1)$. Si $W_1 \cup W_2 \leq V \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \cup W_2$. Sin embargo, por hipótesis, es imposible que

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \wedge \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_2$$

dado que esto implicaría una contradicción al decir que $\vec{w}_1 \notin W_2$ y $\vec{w}_2 \notin W_1$. Por lo tanto, se sigue que la cerradura se cumple si

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1 \vee \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_2$$

Si se cumple $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_1$, entonces $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + (-\vec{w}_1) \in W_1$, lo que implica que $\vec{w}_2 \in W_1$ y $W_2 \subseteq W_1$. La misma lógica aplica para cuando $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W_2$. Queda entonces demostrado que si $W_1 \cup W_2 \leq V$, entonces $(W_1 \subseteq W_2) \vee (W_2 \subseteq W_1)$.

(⇐) Si $(W_1 \subseteq W_2) \vee (W_2 \subseteq W_1)$, entonces $(W_1 \cup W_2 = W_1) \vee (W_1 \cup W_2 = W_2)$. Si $(W_1 \leq V) \wedge (W_2 \leq V)$, entonces $W_1 \cup W_2 \leq V$.

□

1.5. Clases laterales

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W \leq V$ un subespacio de V, entonces*

$$\vec{v} + W = \{\vec{v} + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\}$$

es la clase lateral de W que contiene a $\vec{v} \in V$.

Teorema 1.5. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W \leq V$ un subespacio de V, entonces, $\vec{v} + W \leq V \iff \vec{v} \in W$.*

Demostración. (⇒) Por definición, $\exists \vec{0}_V \in \vec{v} + W$, tal que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}_V$, con $\vec{w} \in W$. Por lo tanto $w = -\vec{v}$, por cerradura en la multiplicación escalar, se sigue entonces que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(-\vec{v}) \in \vec{v} + W$, lo que implica, para $\lambda = -1$, que $(-1)(-\vec{v}) \in \vec{v} + W$, por lo tanto $\vec{v} \in W$. (⇐) Por demostrar que se cumplen los tres incisos del Teorema 1.3. (i) Dado que $\vec{v} \in W$, $\exists -\vec{v}$, tal que $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}_V$. Por lo tanto $\exists \vec{0}_V \in W$. (ii) Sea $\vec{w}_1 \in W$, tal que $\vec{v} + \vec{w}_1 \in \vec{v} + W$.

Ahora bien, sea $\vec{w}_2 \in \vec{v} + W$, se sigue entonces que $\vec{v} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$. Y también, que $\vec{v} + (\vec{v} + \vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in \vec{v} + W$. (*iii*) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{z} \in W$, se sigue que $\vec{v} + \vec{z} \in \vec{v} + W$, entonces

$$\lambda\vec{v} + \lambda\vec{z} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{z} + \vec{0}_V = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{z} + \vec{v} - \vec{v} = \vec{v} + (\lambda\vec{v} + \lambda\vec{z} - \vec{v}) \in \vec{v} + W$$

. $\square$

Teorema 1.6. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W \leq V$ un subespacio vectorial de V. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, entonces $\vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W \iff \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in W$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W$

$$\Rightarrow \vec{0}_V \in W \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{0}_V \in \vec{v}_1 + W = \vec{v}_2 + W$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{0}_V \in \vec{v}_2 + W \Rightarrow \vec{v}_1 \in \vec{v}_2 + W$$

$$\Rightarrow \exists\, \vec{w} \in W \ni \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{w} \in \vec{v}_2 + W$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{w} \in W$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in W$ Sea $\vec{w}_* = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \subseteq$ Sea $\vec{x} \in \vec{v}_1 + W \Rightarrow \vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ para algún $\vec{w}_1 \in W \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{w}_* + \vec{v}_2$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{w}_* + \vec{v}_2 + \vec{w}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 + (\vec{w}_* + \vec{w}_1) \in W \Rightarrow \vec{x} \in \vec{v}_2 + W$$

$\supseteq$ Análogamente sea $\vec{y} \in \vec{v}_2 + W \Rightarrow \vec{y} = \vec{v}_2 + \vec{w}_{**} \in W$

$$\vec{y} = \vec{v}_1 - \vec{w}_* + \vec{w}_{**} = \vec{v}_1 + (\vec{w}_{**} - \vec{w}_*) \Rightarrow \vec{y} \in \vec{v}_1 + W$$

$\square$

Teorema 1.7. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W \leq V$ un subespacio de V, tal que una clase lateral de W toma la forma*

$$\vec{v} + W = \{\vec{v} + \vec{w} \mid \vec{v} \in V \wedge \vec{w} \in W\}$$

La suma vectorial y el producto por escalares de $\mathbb{K}$ se puede definir en el conjunto

$$S = \{\vec{v} + W \mid \vec{v} \in V,\ W \leq V\}$$

de todas las clases laterales de la siguiente forma:

- $\oplus : (\vec{v_1} + W) + (\vec{v}_2 + W) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in W, \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$
- $\odot : \lambda(\vec{v} + W) = \lambda \vec{v}_1 + W, \ \forall \vec{v} \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

De tal forma que S forma un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ que se llama V módulo W y se denota V/W.

Demostración. Por demostrar que (i) las operaciones de suma y producto están bien definidas, y que (ii) S con esas operaciones forma un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ con la notación V/W. (i) Si tenemos que $\vec{v}_1 + W = \vec{v}_{1*} + W$ y que $\vec{v}_2 + W = \vec{v}_{2*} + W$, entonces buscamos demostrar que

$$(\vec{v}_1 + W) + (\vec{v}_2 + W) = (\vec{v}_{1*} + W) + (\vec{v}_{2*} + W)$$

y que

$$\lambda(\vec{v}_1 + W) = \lambda(\vec{v}_{1*} + W) \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Sabemos que $\vec{v}_1 - \vec{v}_{1*} \in W \wedge \vec{v}_2 - \vec{v}_{2*} \in W$, entonces $(\vec{v}_1 - \vec{v}_{1*}) + (\vec{v}_2 - \vec{v}_{2*}) \in W$, reordenando tenemos $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) - (\vec{v}_{1*} + \vec{v}_{2*}) \in W$, lo que implica que

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + W = (\vec{v}_{1*} + \vec{v}_{2*}) + W$$

y por último que $(\vec{v}_1 + W) + (\vec{v}_2 + W) = (\vec{v}_{1*} + W) + (\vec{v}_{2*} + W)$. Ahora bien, dado que $\vec{v}_1 - \vec{v}_{1*} \in W$, se sigue que $\lambda(\vec{v}_1 - \vec{v}_{1*}) \in W$, o bien, que $\lambda\vec{v}_1 - \lambda\vec{v}_{1*} \in W$. Por lo tanto $\lambda(\vec{v}_1 + W) = \lambda(\vec{v}_{1*} + W)$. (ii) De V se hereda la cerradura aditiva, multiplicativa, la conmutatividad y asociatividad en la suma vectorial y la multiplicación escalar, así como también las dos leyes distributivas. Para el neutro aditivo tenemos que $(\vec{v} + W) + W = \vec{v} + W$. Para el inverso aditivo tenemos que $(\vec{v} + W) + (-\vec{v} + W) = W$. Por último, para el neutro multiplicativo tenemos que $1(\vec{v} + W) = \vec{v} + W$. $\square$

1.6. Combinaciones lineales

Definición 1.5. [3] *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y S un subconjunto no vacío de V. Una combinación lineal de elementos de S es un vector de la forma:*

[3]Nota: las combinaciones lineales son, casi siempre, finitas.

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{v}_i$$
$$\forall\lambda_i \in \mathbb{K}, \forall\vec{v}_i \in S, \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 1.8. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $S \subseteq V$ no vacío de vectores de V. Entonces, el conjunto*

$$\langle S\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{v}_i \mid \forall\lambda_i \in S,\ \forall\vec{v}_i \in S,\ i \in \{1, 2, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

es un subespacio de V, de tal forma que cumple con el Teorema 1.3.

Demostración. Sea $\vec{u} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que $\lambda = 0$, entonces $\lambda\vec{u} = 0\vec{v} = \vec{0}_V$, lo que prueba el punto (*1.*) del Teorema 1.3, $\exists\vec{0}_V \in \langle S\rangle$. Ahora, sean $\vec{v}, \vec{w} \in \langle S\rangle$, se sigue entonces que $\exists\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\exists\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$

También, $\exists\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$, por lo tanto

$$\vec{w} = \mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2 + ... + \mu_n\vec{v}_n$$

Finalmente, podemos probar el punto (*2.*) del Teorema 1.3, dado que

$$\vec{v} + \vec{w} = (\lambda_1\mu_1)\vec{v}_1 + (\lambda_2\mu_2)\vec{v}_2 + ... + (\lambda_n\mu_n)\vec{v}_n \ \in \langle S\rangle$$

Sea $\vec{v} \in \langle S\rangle$, y $\eta \in \mathbb{K}$, entonces

$$\eta\vec{v} = \eta(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n) = \eta\lambda_1\vec{v}_1 + \eta\lambda_2\vec{v}_2 + ... + \eta\lambda_n\vec{v}_n \in \langle S\rangle$$

Por lo tanto queda demostrado que $\langle S\rangle$, es decir, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de S, es un subespacio de V, cuando $S \subseteq V$.

□

Definición 1.6. *$\langle S\rangle$ es el subespacio vectorial generado por $S \subseteq V$, donde V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$.*

Teorema 1.9. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y W un subespacio de V, se cumple entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n \in W$$

para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in W$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para $n = 2$ se sigue que $\lambda_1 \vec{v}_1 \lambda_2 + \vec{v}_2 \in W$. Asumimos como hipótesis inductiva que se cumple esta aseveración para $n = k$. Sea

$$w_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_k \vec{v}_k$$

Tal que $w_1 \in W$. Sea w_2 el vector resultante para $n = k + 1$, entonces se tien que $w_2 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_k \vec{v}_k + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} = w_1 + \lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1}$. Por la definición de un subespacio vectorial, sabemos que $\lambda_{k+1} \vec{v}_{k+1} \in W$. Se sigue entonces que $w_2 \in W$. □

Definición 1.7. *Si $\langle S \rangle = V$, se dice entonces que S genera a V.*

Teorema 1.10. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, si $S \subseteq V$, y $S \neq \emptyset$. Si además, $W \subseteq V$, y $S \subseteq W$, entonces $\langle S \rangle \subseteq W$.*

Demostración. Sea $\vec{v} \in \langle S \rangle$, entonces, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ y $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ (con $n \in \mathbb{N}$), tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{2} + ... + \lambda_n \vec{v}_n$. Por hipótesis, se tiene que $S \subseteq W$, por lo tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in W$. Por la demostración del Teorema 1.9 sabemos entonces que $\vec{v} \in W$, lo que finalmente implica que $\langle S \rangle \subseteq W$. □

Teorema 1.11. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$, demostrar que*

$$\langle S \rangle = \cap \{W \mid W \leq V,\ S \subseteq W\}$$

También, $\emptyset \subseteq W \subseteq V$ y $\langle \emptyset \rangle = \{\vec{0}_V\} \subseteq V$.

Demostración. Sea $\vec{u} \in \langle S \rangle$, se sigue entonces que $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$. Si $S \subseteq W$, entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in W$, y por las propiedades de cerradura de los subespacios vectoriales $\vec{u} \in W$, lo que implica que $\langle S \rangle \subseteq W$. Esto es válido para cualquier $W \leq V$, tal que $S \subseteq W$: lo que implica que $\langle S \rangle$ está en la intersección de todos los subespacios $W \leq V$, tales que $S \subseteq W$. Ahora, sea $\vec{w} \in \cap \{W \mid W \leq V,\ S \subseteq W\}$, entonces $\vec{w} \in \langle S \rangle$, dado que $\langle S \rangle$ es parte del conjunto de todos los subespacios de V que contienen a S. Por lo tanto $\langle S \rangle = \cap \{W \mid W \leq V,\ S \subseteq W\}$. □

1.7. Dependencia e independencia lineal

Definición 1.8. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$, donde $S \neq \emptyset$. Se dice que S es* ***linealmente dependiente*** *(l.d.) si $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ (no todos iguales a cero), con $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$$

Definición 1.9. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$, donde $S \neq \emptyset$. Se dice que S es* ***linealmente independiente*** *(l.i.) si*

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$$

con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$), cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Teorema 1.12. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S_1, S_2 \subseteq V$, tales que $S_1 \subseteq S_2$, entonces*

1. *$\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$. Si S_1 genera a V, entonces S_2 genera a V.*

2. *Si S_1 es l.d. entonces S_2 es l.d.*

3. *Si S_2 es l.i. entonces S_1 es l.i.*

Demostración. (*1.*) Sea $\vec{v} \in \langle S_1 \rangle$, se sigue entonces que $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S_1$ y $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, tal que $\vec{v} = \lambda \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$. Como $S_1 \subseteq S_2$, entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S_2$, y $\vec{v} \in \langle S_2 \rangle$. Así, toda combinación lineal de vectores de S_1 es, también, una combinación lineal de vectores de S_2. Por lo tanto, si $V = \langle S_1 \rangle$, entonces $V = \langle S_2 \rangle$.

(*3.*) S_2 es l.i. Expresamos al neutro aditivo del espacio vectorial como una combinación lineal de elementos de S_1, tal que $\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 + ... + \lambda_n \vec{v}_n$, con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S_1$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Por hipótesis, $S_1 \subseteq S_2$, por lo tanto $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S_2$, lo que implica que $\vec{0}_V$ ha sido expresado como una combinación lineal de elementos de S_2, y como este subconjunto es l.i. entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. La combinación lineal de elementos de S_1 que ha expresado al neutro aditivo por lo tanto revela que S_1 es l.i.

(*2.*) Nótese que si la implicación del inciso (*3.*) se lee como un $A \Rightarrow B$, la implicación del inciso (*2.*) se lee con la forma $\neg B \Rightarrow \neg A$. Por lo tanto queda probada al ser la implicación contrapositivo de la implicación del inciso (*3.*). $\square$

Teorema 1.13. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$ un conjunto l.i. de vectores de V, sea $\vec{v} \in V \backslash S = V_2$, entonces, $\vec{v} \in \langle S \rangle \iff S \cup \{\vec{v}\}$ es l.d.*

Demostración. ($\Rightarrow$) $\vec{v} \in \langle S \rangle$, por lo tanto $\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in S$ y $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda \vec{v}_n$. Se sigue entonces que

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda \vec{v}_n + (-1)\vec{v}$$

El vector $\vec{0}_V$ ha sido expresado como una combinación lineal de elementos de $S \cup \{\vec{v}\}$, donde no todos los escalares son iguales a cero. Por lo tanto, $S \cup \{\vec{v}\}$ es l.d.

($\Leftarrow$) Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n \in S \cup \{\vec{v}\}$, una combinación lineal de este conjunto que expresa el neutro aditivo de V toma la forma: $\vec{0}_V = \eta_2 \vec{w}_1 + \eta_2 \vec{w}_2 + ... + \eta_n \vec{w}_n$. Con $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$, donde algún $\eta_i \neq 0$, con $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por hipótesis, algún $\vec{w}_i = \vec{v}$, sin pérdida de generalidad, dígase que $\vec{w}_1 = \vec{v}$, de lo contrario, el conjunto sería l.i. Entonces, se tiene que $\vec{0}_V = \eta_1 \vec{v} + \eta_2 \vec{w}_2 + ... + \eta_n \vec{w}_n$. Con $\eta_1 \neq 0$. Esto implica que $\eta_1 \vec{v} = -\eta_2 \vec{w} - \eta_3 \vec{w}_3 - ... - \eta_n \vec{w}_n$, y por último que, $\vec{v} = -\frac{\eta_2}{\eta_1} \vec{w} - \frac{\eta_3}{\eta_1} \vec{w}_3 - ... - \frac{\eta_n}{\eta_1} \vec{w}_n$. Esto implica que $\vec{v}$ puede ser expresado como una combinación lineal de elementos de S, y por lo tanto $\vec{v} \in \langle S \rangle$ $\square$

Teorema 1.14. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y sean $\vec{v}, \vec{u} \in V$ vectores no nulos, entonces $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es un conjunto l.d. $\iff$ $\vec{v}$ o $\vec{u}$ es múltiplo del otro.*

Demostración. ($\Rightarrow$) El conjunto $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es l.d. Por lo tanto, el neutro aditivo de V, puede ser expresado como una combinación lineal de la siguiente forma: $\vec{0}_V = \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Sin pérdida de generalidad, dígase que $\lambda \neq 0$, tal que se cumpla la definición de l.d. Entonces, se tiene que $\vec{v} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{v}$, y por lo tanto $\vec{v}$ es un múltiplo de $\vec{u}$. ($\Leftarrow$) La prueba es análoga, sin importar que vector sea múltiplo de cual. Sin pérdida de generalidad, sea $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces, se sigue que $\vec{0}_V = \lambda \vec{u} + (-1)\vec{v}$, y por lo tanto el conjunto $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es l.d. $\square$

Teorema 1.15. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y sean $\vec{v}, \vec{u} \in V$, entonces, $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es l.i. $\iff \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0 \neq \mu$, se sigue que $\{\lambda \vec{v}, \mu \vec{u}\}$ es l.i.*

Demostración. ($\Rightarrow$) El conjunto $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es l.i. Entonces, se sigue que $\vec{0}_V = \alpha_1\vec{v} + \alpha_2\vec{v}$, donde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Por lo tanto, sean $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{K}$, se sigue que $\vec{0}_V = \eta_1(\lambda\vec{v}) + \eta_2(\mu\vec{u}) = (\eta_1\lambda)\vec{v} + (\eta_2\mu)\vec{u}$. Por hipótesis, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ son escalares en el campo distintos de cero, entonces $\eta_1 = \eta_2 = 0$, tal que $\eta_1\lambda = 0$ y $\eta_2\mu = 0$. ($\Leftarrow$) Sea $\{\lambda\vec{v}, \mu\vec{u}\}$ un conjunto l.i. donde $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ son escalares distintos de cero. Entonces, se tiene que $\vec{0}_V = \beta_1(\lambda\vec{v}) + \beta_2(\mu\vec{u})$. Esto implica que $\beta_1 = \beta_2 = 0$, y por lo tanto $\vec{0}_V = (\beta_1\lambda)\vec{v} + (\beta_2\mu)\vec{u} = (0\lambda)\vec{v} + (0\mu)\vec{u} = 0\vec{v} + 0\vec{u}$. Se concluye entonces que $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es un conjunto l.i. $\square$

Teorema 1.16. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$, tal que $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ un subconjunto de V. Entonces, S es l.d. $\iff$ $\vec{v}_1 = \vec{0}_V$, o, $\vec{v}_k \in \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{k-1}\}\rangle$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ tal que S es l.d. entonces $\exists\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$\vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n$$

Sabemos entonces que algún $\lambda_i \neq 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Si $\vec{v}_1 =$ se cumple que S es l.d. Si $\vec{v}_1 \neq 0$, como S es l.d. podemos decir que k es el máximo índice tal que $\lambda_k \neq 0$, y por lo tanto $\vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k$.

($\Leftarrow$) Si $\vec{v}_1 = 0$, entonces S es l.d. Si $\vec{v}_1 \neq 0$, y $\exists\vec{v}_k \in \langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{k-1}\}\rangle$, entonces $\exists\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1} \in \mathbb{K}$, con $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\vec{v}_k = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$

$$\Rightarrow \vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} + (-1)\vec{v}_k$$

Lo que implica que S es un conjunto l.d. $\square$

1.8. Bases y dimensión

Definición 1.10. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un conjunto β es base de V si β es l.i. y $\langle\beta\rangle = V$.*

Teorema 1.17. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\beta \subseteq V$ un subconjunto de vectores de V, entonces, β es base de V $\iff$ $\forall\vec{u} \in V$ se tiene que, $\vec{u}$ se escribe de forma única como combinación lineal de elementos de β.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Todo $\vec{u} \in V$ se escribe de forma única como combinación lineal de elementos de β, basta entonces demostrar que β es un conjunto l.i. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n \in \beta$ tales que

$$\vec{0}_V = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + 0\vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \vec{0}_V = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n, \text{ con } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Dado que cada combinación lineal es única. Por lo tanto β es l.i. y es una base de V. □

Teorema 1.18. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ generado por un conjunto finito $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \subseteq V$, entonces, $\exists \beta \subseteq S$ que es base de V. Más aún, V tiene una dimensión finita.*

Demostración. (*Caso I*) Si $S = \emptyset \vee S = \{\vec{0}_V\}$, entonces $V = \langle S \rangle = \{\vec{0}_V\}$, esto implica que $\beta = \emptyset \subseteq S$, y por lo tanto es base de V. (*Caso II*) $\exists \vec{v}_1 \in S$, tal que $\vec{v}_1 \neq 0$. Se sigue entonces que $\{\vec{v}_1\} \subseteq S$ es l.i. Agregamos vectores hasta que se tenga $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \subseteq S$, donde $k \in \mathbb{N}$ representa el índice máximo tal que $\beta \cup \{\vec{v}_{k+1}\}$ es l.d. *Afirmación: β es base de V.* Como β es l.i. basta probar que $S \subseteq \langle \beta \rangle$. Sea $\vec{v} \in S$, (*Caso II.a*) si $\vec{v} \in \beta$, entonces $\vec{v} \in \langle \beta \rangle$. (*Caso II.b*) Si $\vec{v} \in S \setminus \beta$, entonces $\beta \cup \{\vec{v}\}$ es l.d. y por el Teorema 1.13 $\vec{v} \in \langle \beta \rangle$, y por lo tanto

$$S \subseteq \langle \beta \rangle \Rightarrow \langle S \rangle = V \subseteq \langle \langle \beta \rangle \rangle = \langle \beta \rangle$$

□

Teorema 1.19. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\vec{v}, \vec{u} \in V$, tal que $\vec{v} \neq \vec{u}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda \neq 0$. Si $\{\vec{v}, \vec{u}\}$ es base de V, entonces $\{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\}$ es base de V.*

Demostración. Por demostrar que (i) $\{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\}$ es l.i. (ii) y $V = \langle \{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\} \rangle$. (i) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, tal que $\vec{0}_V = \alpha_1(\vec{u} + \vec{v}) + \alpha_2(\lambda\vec{u}) \Rightarrow \vec{0}_V = (\alpha_1 + \alpha_2\lambda)\vec{u} + \alpha_1\vec{v} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2\lambda = 0$ Como por hipótesis $\lambda \neq 0$, entonces $\alpha_2 = 0$, y por lo tanto $\{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\}$ es l.i. (ii) Sea $\vec{z} \in V$, entonces, sabemos que $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{z} = \mu_1\vec{u} + \mu_2\vec{v}$. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{z} = \gamma_1(\vec{u} + \vec{v}) + \gamma_2(\lambda\vec{u}) \Rightarrow \vec{z} = (\gamma_1 + \gamma_2\lambda)\vec{u} + \gamma_1\vec{v} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2\lambda = \mu_1 \wedge \gamma_1 = \mu_2$

$$\Rightarrow \mu_2 + \gamma_2\lambda = \mu_1$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda} \Rightarrow \vec{z} = \mu_2(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda}(\lambda\vec{u})$$

Por lo tanto $\vec{z} \in \langle\{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\}$, lo que implica que $\{\vec{u} + \vec{v}, \lambda\vec{u}\}$ es base de V. $\square$

Teorema 1.20. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, generado por un subconjunto G con exactamente n vectores (con $n \in \mathbb{N}$) y L un subconjunto l.i. de V con exactamente m vectores (con $m \in \mathbb{N}$). Entonces $m \leq n$, y más aún, $\exists H \subseteq G$ con exactamente $n - m$ vectores tal que $\langle L \cup H \rangle = V$.*

Demostración. (*Base inductiva*) Si $m = 0$, entonces $L = \emptyset$, además $m \leq n \Rightarrow H = G \Rightarrow L \cup H = \emptyset \cup H = \emptyset \cup G = G$, por lo tanto $\langle L \cup H \rangle = \langle G \rangle = V$. (*Hipótesis inductiva*) Supóngase el resultado cierto para $m \leq n$. (*Paso inductivo*) Por demostrar que se cumple para $m + 1 \leq n$. Sea $L = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{m+1}\}$ un conjunto l.i. Entonces, $L' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m\}$ es l.i. con m vectores. Por la hipótesis inductiva, sabemos que $m \leq n$, y además, que $\exists H' \subseteq G$ con $n - m$ vectores con la forma $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_{n-m}\}$. Esto implica que $\langle L' \cup H' \rangle = V$, y como $v_{m+1} \in V$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ y $\exists \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{n-m} \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{v}_{m+1} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_m\vec{v}_m + \eta_1\vec{u}_1 + \eta_2\vec{u}_2 + ... + \eta_{n-m}\vec{u}_{n-m}$$

Afirmación: $n - m \geq 1$, y por lo tanto $m + 1 \leq n$, tal que L continúe siendo l.i. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\eta_1 \neq 0$, entonces

$$\eta_1\vec{u}_1 = -\lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2 - ... - \lambda_m\vec{v}_m + \vec{v}_{m+1} - \eta_2\vec{u}_2 - ... - \eta_{n-m}\vec{u}_{n-m}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = -\frac{\lambda_1}{\eta_1}\vec{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\eta_1}\vec{v}_2 - ... - \frac{\lambda_m}{\eta_1}\vec{v}_m + \frac{1}{\eta_1}\vec{v}_{m+1} - \frac{\eta_2}{\eta_1}\vec{u}_2 - ... - \frac{\eta_{n-m}}{\eta_1}\vec{u}_{n-m}$$

Esto implica que $\vec{u} \in \langle L \cup H \rangle$, y como $L' \subseteq \langle L \cup H \rangle \wedge H' \subseteq \langle L \cup H \rangle$, se tiene que

$$L' \cup H' \subseteq \langle L \cup H \rangle$$

$$\Rightarrow \langle L' \cup H' \rangle \subseteq \langle\langle L \cup H \rangle\rangle = \langle L \cup H \rangle$$

$$\Rightarrow V = \langle L \cup H \rangle$$

$\square$

Corolario 1.20.1. *Sea V un espacio vectorial finitamente generado*[4] *sobre un campo $\mathbb{K}$, entonces, todas las bases de V tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Sean β y γ bases de V, con cardinalidades $\#\beta = p \wedge \#\gamma = q$, como $\langle\beta\rangle = V$, y γ es l.i. entonces $q \leq p$. Como $\langle\gamma\rangle = V$ y β es l.i. entonces $p \leq q$, lo que implica que $q = p$. □

Definición 1.11. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una base de V. La dimensión de V sobre $\mathbb{K}$ es* ***la cardinalidad de cualquier base*** *base y se denota*

$$\#\beta = dim_{\mathbb{K}}(V)$$

Corolario 1.20.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$, tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, con $n \in \mathbb{N}$:*

1. *Cualquier conjunto generador tiene al menos n elementos. Más aún, si G genera y $\#G = n$, entonces G es base de V.*

2. *Si $L \subseteq V$ es l.i. y $\#L = n$, entonces L es base de V.*

3. *Cualquier conjunto l.i. de V se puede extender a una base de V.*

Demostración. Sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, una base de V. (*1.*) Si G es un conjunto generador, entonces por el Teorema **??** $\exists\gamma \subseteq G$, tal que γ es base de V. De donde se sigue que $n = \#\gamma \leq \#G$. Si G genera, y además, $\#G = n$, entonces, también por Teorema **??** sabemos que $\exists\gamma \subseteq G$ que es base de V. Entonces $n = \#\gamma = \#G = n$, lo que implica que $\gamma = G$, y por lo tanto G es base de V. (*2.*) Sea L un conjunto l.i. tal que $\#L = n$. Como β genera, entonces $\exists H \in \beta$ con cardinaldiad $\#H = n - n$ tal que $\langle L \cup H\rangle = V$. Como $H = \emptyset$, entonces $\langle L \cup \emptyset\rangle = \langle L\rangle = V$. Por lo tanto L es base de V. □

Nota 1.1. *Sea un conjunto $G \subseteq V$, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $\#G > n$, entonces G es l.d. y nada garantiza que genere.*

[4]Se dice que un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ es finitamente generado si $\exists G \subseteq V$ con cardinalidad finita, tal que $\langle G\rangle = V$.

Nota 1.2. *Sea un conjunto* $L \subseteq V$*, donde* $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$*, con* $n \in \mathbb{N}$*), tal que* $\#L < n$*, entonces* L *no genera y nada garantiza que sea l.i.*

Teorema 1.21. *Sea* V *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$ *de dimensión finita, y* $W \leq V$ *un subespacio de* v*, entonces* V/W *es de dimensión finita y*

$$dim_{\mathbb{K}}(V/W) = dim_{\mathbb{K}}(V) - dim_{\mathbb{K}}(W)$$

Demostración. Sea $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ una base para W, así $dim_{\mathbb{K}}(W) = n$, con $n \in \mathbb{N}$. Como $\gamma \subseteq V$, más aún, γ es l.i. Entonces, por el Teorema 1.20, γ puede ser extendido para formar una base de V. Entonces $\delta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, es una base de V, tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n + k$. *Afirmación:* $\Omega = \{\vec{v}_1 + W, \vec{v}_2 + W, ..., \vec{v}_k + W\}$ *es base de* V/W*.* Por demostrar que (i) Ω es l.i. y (ii) $V/W = \langle \Omega \rangle$. (i) Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, tal que

$$W = \lambda_1(\vec{v}_1 + W) + \lambda_2(\vec{v}_2 + W) + ... + \lambda_k(\vec{v}_k + W)$$

$$\Rightarrow W = (\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k) + W$$

$$\Rightarrow \vec{v}_* = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k \in W$$

Ahora, $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, tales que $\vec{v}_* = \alpha_1\vec{w}_1 + \alpha\vec{w}_2 + ... + \alpha_n\vec{w}_n$, tenemos entonces que

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k = \alpha_1\vec{w}_1 + \alpha\vec{w}_2 + ... + \alpha_n\vec{w}_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_k\vec{v}_k - \alpha_1\vec{w}_1 - \alpha\vec{w}_2 - ... - \alpha_n\vec{w}_n = \vec{0}_V$$

Esta es un combinación lineal de elementos de δ que produce al neutro aditivo, por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, lo que implica que Ω es l.i. (ii) Sea $\vec{v} \in V$, entonces, $\exists \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, \pi_1, \pi_2, ..., \pi_k \in \mathbb{K}$, tales que

$$\vec{v} = \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + ... + \mu_n\vec{w}_n + \pi_1\vec{v}_1 + \pi_2\vec{v}_2 + ... + \pi_k\vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \vec{v} + W = (\mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + ... + \mu_n\vec{w}_n + \pi_1\vec{v}_1 + \pi_2\vec{v}_2 + ... + \pi_k\vec{v}_k) + W$$

$$\Rightarrow \vec{v} + W = (\pi_1\vec{v}_1 + \pi_2\vec{v}_2 + ... + \pi_k\vec{v}_k) + (\mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + ... + \mu_n\vec{w}_n) + W$$

$$\Rightarrow \vec{v} + W = (\pi_1\vec{v}_1 + \pi_2\vec{v}_2 + ... + \pi_k\vec{v}_k) + W$$

$$\Rightarrow \vec{v} + W = \pi_1(\vec{v}_1 + W) + \pi_2(\vec{v}_2 + W) + ... + \pi_k(\vec{v}_k + W)$$

Por lo tanto Ω es base de V/W. Se sigue entonces que

$$dim_{\mathbb{K}}(V/W) = dim_{\mathbb{K}}(V) - dim_{\mathbb{K}}(W) = (n+k) - n = k + n - n = k$$

$\square$

Teorema 1.22. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $W \leq V$ un subespacio de V, se sigue que $dim_{\mathbb{K}}(W) \leq dim_{\mathbb{K}}(V)$. Si $dim_{\mathbb{K}}(W) = dim_{\mathbb{K}}(V)$, entonces $W = V$.*

Demostración. (*Caso I*) Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, tal que $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, con $n \in \mathbb{N}$. Si $W = \{\vec{0}_V\}$, entonces $\emptyset$ es base de W, por lo tanto $dim_{\mathbb{K}}(W) = 0 \leq n$. (*Caso II*) Si $\exists \vec{w}_1 \in W$, tal que $\vec{w}_1 \neq 0$. Sea $S = \{\vec{w}_1\}$ un subconjunto l.i. de W, podemos agregar vectores de W a S hasta tener el subconjunto $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, el cual es l.i. y al agregar cualquier otro vector de W este se vuelve l.d. *Afirmación: γ es base de W.* Basta demostrar, entonces, que $W = \langle \gamma \rangle$. Sea $\vec{w} \in W$. (*Caso II.a*) $\vec{w} \in \gamma$, por lo tanto $\vec{w} \in \langle \gamma \rangle$. (*Caso II.b*) $\vec{w} \notin \gamma$, entonces $\gamma \cup \{\vec{w}\}$ es l.d. Esto implica que, por el Teorema 1.13, $\vec{w} \in \langle \gamma \rangle$, y por lo tanto, $W = \langle \gamma \rangle$. Además, nótese que $k \leq n$, lo que implica que $dim_{\mathbb{K}}(W) \leq dim_{\mathbb{K}}(V)$. Si $\#\gamma = n$, como γ es un conjunto l.i. con n elementos, entonces γ es base de V, por el Corolario 1.20.2. $\square$

Corolario 1.22.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $W \leq V$. Entonces, cualquier base de W puede ser extendida a una base de V.*

1.9. Subconjuntos máximos l.i.

Definición 1.12. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $L \subseteq V$ un subconjunto l.i. de V. Se dice que L es **máximo l.i.** si L es l.i. y al agregar cualquier vector de $\vec{v} \in V \setminus L$ tenemos que $L \cup \{\vec{v}\}$ es l.d.*

Teorema 1.23. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $L \subseteq V$ un subconjunto de vectores de V, entonces, L es base de $V \iff L$ es máximo l.i.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que L es base de V. Entonces L es l.i. y $V = \langle L \rangle$. Sea $\vec{v} \in V$, se sigue que $\vec{v} \in \langle L \rangle$, lo que implica que $L \cup \{\vec{v}\}$ es l.d. Así, L es entonces máximo l.i.

($\Leftarrow$) Supongamos que L es máximo l.i. Por demostrar que L genera a V. Sea $\vec{u} \in V$. (*Caso I*) Si $\vec{u} \in L$, entonces $\vec{u} \in \langle L \rangle$. (*Caso II*) Si $\vec{u} \in V \setminus L$, entonces $L \cup \{\vec{u}\}$ es l.d. Por lo tanto (por el Teorema 1.13) $\vec{u} \in \langle L \rangle$. L es entonces base de V. $\square$

Definición 1.13. *Sea $\mathscr{F}$ una familia de conjuntos. Un elemento $M \in \mathscr{F}$* ***es maximal con respecto a la inclusión*** *$\subsetneq$ si M no está contenido en ningún otro elemento de $\mathscr{F}$ además de sí mismo.*

Definición 1.14. *Una colección de conjuntos $\mathscr{C}$* ***es una cadena*** *si para cada par de conjuntos $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ se tiene que $C_1 \subsetneq C_2 \vee C_2 \subsetneq C_1$.*

Definición 1.15. *Sea $\mathscr{F}$ una familia de conjuntos. Si $\forall \mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$ $\exists M \in \mathscr{F}$, tal que $\mathscr{C} \subseteq M$, entonces, hay elementos maximales en $\mathscr{F}$.*[5]

Teorema 1.24. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y $S \subseteq V$ un subconjunto l.i. de V. Entonces, existe un conjunto máximo l.i. que contiene a S.*

Demostración. Sea

$$\mathscr{F} = \{L \subseteq V \mid L \text{ es l.i. } \wedge S \subseteq L\}$$

Nótese que $\mathscr{F} \neq \emptyset$, dado que $S \subseteq \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$ una cadena de $\mathscr{F}$, por demostrar que $\exists U \in \mathscr{F}$, tal que $C \subseteq U$, $\forall C \in \mathscr{C}$. Sea

$$U = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$$

Falta ver entonces que $U \in \mathscr{F}$, es decir que (i) $S \subseteq U$ y (ii) U es l.i. (i) Como $S \subseteq C$, $\forall C \in \mathscr{C}$, entonces, $S \subseteq U$. (ii) Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \in U$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\vec{0}_V = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_k \vec{v}_k$$

Como $\mathscr{C}$ es una cadena, entonces $\exists C_0 \in \mathscr{C}$, tal que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \in C_0$, más aún, por construcción C_0 es l.i. Esto implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, y por lo tanto U es l.i. Como $U \subseteq \mathscr{F}$, se tiene entonces que existen conjuntos maximales en $\mathscr{F}$. $\square$

Corolario 1.24.1. *Todo espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{K}$ tiene una base.*

[5] Es es el *principio de maximalidad*, el cual es lógicamente equivalente al *Axioma de Elección*: este es un supuesto presente en la mayoría de los desarrollos axiomáticos de la teoría de conjuntos.

Capítulo 2

Transformaciones lineales y matrices

2.1. Transformaciones lineales, núcleos e imágenes

Definición 2.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal (o función lineal) es una función que tiene la forma $T : V \to W$ que satisface:*

1. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

2. $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$, $\forall \vec{u} \in V \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Proposición 2.1.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, entonces una transformación lineal $T : V \to W$ cumple con las siguientes propiedades:*

1. *Si $T : V \to W$ es lineal $\Rightarrow T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$*

2. $T : V \to W$ *es lineal* $\iff T(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K}$

3. $T : V \to W$ *es lineal* $\iff T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\vec{u}_i)$

Demostración. (*1.*) Como $\vec{0}_V = 0 \cdot \vec{u}$, para algún $\vec{u} \in V$

$$\Rightarrow T(\vec{0}_V) = T(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot T(\vec{u}) = \vec{0}_W$$

(*2.*) ($\Rightarrow$) Si $T : V \to W$ es lineal $\Rightarrow T(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = T(\lambda\vec{u})+T(\vec{v}) = \lambda T(\vec{u})+T(\vec{v})$. ($\Leftarrow$) Se tiene que $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(1\vec{u}+\vec{v}) = 1T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. También, $T(\lambda\vec{u}) = T(\lambda\vec{u}+\vec{0}_V) =$

$\lambda T(\vec{u}) + T(\vec{0}_V) = \lambda T(\vec{u}) + \vec{0}_W$. (*3.*) ($\Rightarrow$) Si T es lineal, entonces

$$T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i) = T(\lambda_1 \vec{u}_1) + T(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{u}_i) = ... = \sum_{i=1}^{n} T(\lambda_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\vec{u}_i)$$

($\Leftarrow$) Sea $n = 2$, tal que $T(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_1 T(\vec{u}_1) + \lambda_2 T(\vec{u}_2)$. Sin pérdida de generalidad dígase que $\lambda_2 = 1$, entonces $T(\lambda_1 \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \lambda_1 T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2)$. Esta última igualdad, dado que se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$, implica que T es lineal, por la propiedad (*2.*). $\square$

Definición 2.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. El núcelo (o kernel) de T está dado por*

$$N(T) = \{\vec{u} \in V \mid T(\vec{u}) = \vec{0}_W\} \subseteq V$$

La imagen (o rango) de T está dada por

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{u} \in V,\ T(\vec{u}) = \vec{w}\} \subseteq W$$

Teorema 2.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal $\Rightarrow$*

1. *$N(T) \leq V$*

2. *$Im(T) \leq W$*

Demostración. (*1.*) (i) Como T es lineal $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{0}_V \in N(T)$. ($ii$) Sean $\vec{u}, \vec{v} \in N(T) \Rightarrow T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0}_W + \vec{0}_W = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in N(T)$. ($iii$) Sean $\vec{u} \in N(T) \wedge \lambda \in \mathbb{K}$, por demostrar que $\lambda \vec{u} \in N(T)$. Como T es lineal $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u}) = \lambda \vec{0}_W = \vec{0}_W \Rightarrow \lambda \vec{u} \in N(T)$. Por lo tanto $N(T) \leq V$. (*2.*) (i) Como T es lineal $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in Im(T)$. ($ii$) Sean $\vec{z}, \vec{w} \in Im(T)$. Sabemos que $\exists \vec{u}, \vec{v} \in V$ tales que $T(\vec{u}) = \vec{z} \wedge T(\vec{v}) = \vec{w}$. Se sigue que $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{z} + \vec{w} \Rightarrow \vec{z} + \vec{w} \in Im(T)$. ($iii$) Sean $\vec{w} \in Im(T) \wedge \lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que $\exists \vec{u} \in V$, tal que $T(\vec{u}) = \vec{w}$. Como T es lineal $T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \vec{w} \in Im(T)$. Por lo tanto $Im(T) \leq W$. $\square$

Teorema 2.2. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ una transformación lineal y $\beta \subseteq V$ una base de V. Entonces*

$$T(\beta) = \{T(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \beta\}$$

genera a $Im(T) = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{u} \in V,\ T(\vec{u}) = \vec{w}\} \subseteq W$

Demostración. Sea $\vec{w} \in Im(T) \Rightarrow \exists \vec{u} \in V$ tal que $T(\vec{u}) = \vec{w}$. Como β es base de V, $\exists \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \wedge \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i \Rightarrow T(\vec{u}) = T(\sum_{i=1}^{k} = \lambda_i \vec{u}_i)$

$$\Rightarrow \vec{w} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\vec{u}_i)$$

$\vec{w}$ se expresa entonces como una combinación lineal de elementos de $T(\beta)$. □

Teorema 2.3. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal*

$$\Rightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(N(T)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(T))$$

Demostración. Sea $\gamma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ una base de $N(T)$, sabemos que $\gamma \subseteq V$ es l.i. Por lo tanto puede ser extendida a una base de V. Sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, ..., \vec{v}_n\}$ una base de V. *Afirmación:* $T(\beta - \gamma) = \{T(\vec{v}_{k+1}), T(\vec{v}_{k+2}), ..., T(\vec{v}_n)\}$ *es base de* $Im(T)$. Por demostrar que (i) $T(\beta - \gamma)$ genera a $Im(T)$ y (ii) que $T(\beta - \gamma)$ es l.i. (i) Sea $\vec{w} \in Im(T) \Rightarrow \exists \vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = T(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i)$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\vec{v}_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(\vec{v}_i)$$

$$\Rightarrow T(\vec{v}) = \vec{0}_W + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(\vec{v}_i)$$

Lo que implica que $Im(T) = \langle T(\beta - \gamma) \rangle$. (ii) Sean $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\vec{0}_W = \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j T(\vec{v}_j) = T(\sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \vec{v}_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \vec{v}_j \in N(T)$$

$$\Rightarrow \exists \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k \in \gamma \subseteq V \wedge \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_k \in \mathbb{K} \text{ tales que } \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{0}_V = \sum_{j=k+1}^{n} \eta_j \vec{v}_j + \sum_{i=1}^{k} (-\zeta_i) \vec{v}_i$$

Como esta última es una combinación lineal de elementos de $\beta \subseteq V$ que expresa al neutro aditivo, sabemos que $\eta_{k+1} = \eta_{k+2} = ... = \eta_n = 0$. Por lo tanto $T(\beta - \gamma)$ es l.i. Además, note usted que

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(N(T)) + dim_{\mathbb{K}}(Im(T) = k + (n - k) = n$$

□

Teorema 2.4. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal $\Rightarrow$ T es inyectiva $\iff$ $N(T) = \{\vec{0}_V\}$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $N(T) = \{\vec{0}_V\}$. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tales que $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}_W \Rightarrow T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in N(T) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$. Por lo tanto T es inyectiva. ($\Rightarrow$) Suponga usted que T es inyectiva. Sea $\vec{u} \in N(T) \Rightarrow T(\vec{u}) = \vec{0}_W$. Sin embargo, como $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow T(\vec{u}) = T(\vec{0}_V)$. Como T es inyectiva $\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}_V \Rightarrow N(T) = \{\vec{0}_V\}$ □

Teorema 2.5. *Sea V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*
2. *T es sobreyectiva*
3. *$Dim_{\mathbb{K}}(Im(T)) = Dim_{\mathbb{K}}(W)$*

Demostración. T es inyectiva $\iff$ $N(T) = \{\vec{0}_V\}$ $\iff$ $dim_{\mathbb{K}}(N(T)) = 0$ $\iff$ $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(Im(T))$ $\iff$ $dim_{\mathbb{K}}(W) = dim_{\mathbb{K}}(Im(T))$ $\iff$ $W = Im(T)$ $\iff$ T es suprayectiva.

□

Corolario 2.5.1. *Sean $T \wedge R$ dos transformaciones lineales. Si estas coinciden en los elementos de una base $\Rightarrow T = R$.*

Teorema 2.6. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, suponga que $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ es una base de V. Sean $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n \in W \Rightarrow \exists! T : V \to W$ tal que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Demostración. Sea $\vec{v} \in V$. Como β base de $V \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$. Sea $T : V \to W \Rightarrow T(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{w}_i$ por demostrar que T es lineal. Sean $\vec{u}, \vec{z} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ y $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i \wedge \vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \vec{v}_i$. Note usted que

$$\alpha \cdot \vec{u} + \vec{z} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot \mu_i + \eta_i) \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow T(\alpha \cdot \vec{u} + \vec{z}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot \mu_i + \eta_i) \vec{w}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \vec{w}_i = \alpha T(\vec{u}) + T(\vec{z})$$

Por lo tanto T es lineal. También, es evidente que $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_i = 1 \Rightarrow T(1 \cdot \vec{v}_i) = 1 \cdot \vec{w}_i \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. T también es única. Suponga que $\exists R : V \to W$ tal que $R(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$. Sin embargo, por el Corolario 2.5.1 $T = R$. □

Teorema 2.7. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si $dim_{\mathbb{K}}(V) < dim_{\mathbb{K}}(W) \Rightarrow T$ no es puede ser inyectiva.*

Demostración. Suponga que $dim_{\mathbb{K}}(V) < dim_{\mathbb{K}}(W) \wedge T$ es suprayectiva. Se tiene entonces que $dim_{\mathbb{K}}(Im(T)) = dim_{\mathbb{K}}(W)$. Por el Teorema 2.3 se tiene que

$$dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(Im(T)) + dim_{\mathbb{K}}(N(T)) = dim_{\mathbb{K}}(W) + dim_{\mathbb{K}}(N(T)) > dim_{\mathbb{K}}(W)$$

Por lo tanto T no puede ser suprayectiva, más aún $dim_{\mathbb{K}}(N(T)) \neq \emptyset$, lo que implica que T no es inyectiva. □

2.2. Matrices asociadas a una transformación lineal

Definición 2.3. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una base ordenada de V es una base que tiene un orden específico.*

Definición 2.4. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ una base ordenada de V y $\vec{v} \in V$. El* ***vector coordenado*** *de $\vec{v}$ con respecto a β está dado por*

$$[\ \vec{v}\ ]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ son los escalares únicos tales que $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$.

Definición 2.5. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente y $T : V \to W$ una transformación lineal. $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ $\exists a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} \in \mathbb{K}$ tales que $T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{w}_i$. La matriz asociada a T con respecto a β y γ está dada por*

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Note usted que la j-ésima columna de la matriz $[T]_\beta^\gamma = [T(\vec{v}_j)]_\gamma$.

Notación 2.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, entonces*

$$\mathscr{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$$

Definición 2.6. *Sean $T, R \in \mathscr{L}(V, W)$, definimos*

1. *$T + R : V \to W$ como $(T + R)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + R(\vec{v})$ $\forall \vec{v} \in V$.*

2. *$\lambda T : V \to W$ como $(\lambda \cdot T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$.*

Como la suma (1.) de transformaciones lineales y prodcuto (2.) por escalar de transformaciones lineales.

Teorema 2.8. *Sean $T, R \in \mathscr{L}(V, W)$. Se tiene entonces que $\forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda T + R$ es lineal.*

Demostración. Sean $T, R \in \mathscr{L}(V, W)$, $\vec{v}$, $\vec{u} \in V$ y $\mu \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
(\lambda T + R)(\mu\vec{v} + \vec{u}) &= \lambda T(\mu\vec{v} + \vec{u}) + R(\mu\vec{v} + \vec{u}) \\
&= \lambda[T(\mu\vec{v} + \vec{u})] + \mu R(\vec{v}) + R(\vec{u}) \\
&= \lambda[\mu T(\vec{v}) + T(\vec{u})] + \mu R(\vec{v}) + R(\vec{u}) \\
&= \lambda\mu T(\vec{v}) + \lambda T(\vec{u}) + \mu R(\vec{v}) + R(\vec{u}) \\
&= \lambda\mu T(\vec{v}) + \mu R(\vec{v}) + \lambda T(\vec{u}) + R(\vec{u}) \\
&= \mu(\lambda T + R)(\vec{v}) + (\lambda T + R)(\vec{v})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda T + R$ es lineal. □

Corolario 2.8.1. *El conjunto $\mathscr{L}(V, W)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones dadas en la Definición 2.6.*

Teorema 2.9. *Sean V y W dos espacios vectoriales, finitamente generados, sobre un campo $\mathbb{K}$; sean $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ y $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_m\}$ bases de V y W respectivamente; y sean $T, R \in \mathscr{L}(V, W) \Rightarrow$*

1. $[T + R]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [R]_\beta^\gamma$
2. $[\lambda T]_\beta^\gamma = \lambda[T]_\beta^\gamma \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Demostración. (*1.*) Sean a_{ij} y b_{ij} las j-ésimas columnas de las matrices $[T]_\beta^\gamma$ y $[R]_\beta^\gamma$, donde $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces $\forall \vec{v}_j \in \beta$ se tiene que

$$T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{w}_i \ \wedge \ R(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\vec{w}_i$$

$$\Rightarrow (T + R)(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\vec{w}_i$$

$$\Rightarrow ([T + R]_\beta^\gamma)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = ([T]_\beta^\gamma + [R]_\beta^\gamma)_{ij}$$

(*2.*) Sea $([T]_\beta^\gamma)_{ij} = A_{ij}$

$$\Rightarrow T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i$$

$$\Rightarrow \lambda T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda A_{ij} w_i \text{ donde } \lambda \in \mathbb{K}$$

Esto implica que $(\lambda[T]_\beta^\gamma)_{ij} = \lambda A_{ij} \therefore [\lambda T]_\beta^\gamma = \lambda[T]_\beta^\gamma$ □

2.3. Composición de transformaciones lineales y mutiplicación matricial

Teorema 2.10. *Sean V, W y Z tres espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$), y sean $T : V \to W$ y $R : W \to Z$ transformaciones lineales. Entonces $RT : V \to Z$ es lineal.*

Demostración. Sean $\vec{v}, \vec{u} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}(RT)(\lambda\vec{v} + \vec{u}) &= R(T(\lambda\vec{v} + \vec{u})) \\ &= R(\lambda T(\vec{v}) + T(\vec{u})) \\ &= \lambda R(T(\vec{v})) + R(T(\vec{u})) \\ &= \lambda(RT)(\vec{v}) + (RT)(\vec{u})\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.11. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y sean $T, R, S \in \mathscr{L}(V)$*[1] $\Rightarrow$

1. $T(R + S) = TR + TS \;\wedge\; (R + S)T = RT + ST$
2. $T(RS) = (TR)S$
3. $T\mathrm{I} = \mathrm{I}T = T$[2]
4. $\lambda(RS) = (\lambda R)S = R(\lambda S)\ \forall\lambda \in \mathbb{K}$

Demostración. Sea $\vec{v} \in V$. (*1.*) Se sigue que $[T(R + S)](\vec{v}) = T[(R + S)(\vec{v})]$. Por las operaciones definidas para el espacio $\mathscr{L}(V)$, sabemos que

$$T[R(\vec{v}) + S(\vec{v})] = T(R(\vec{v})) + T(S(\vec{v})) = TR + TS$$

La demostración para $(R + S)T = RT + ST$ resulta ser trivial. (*2.*) Vea que

$$[T(RS)](\vec{v}) = T[(RS)(\vec{v})] = T[R(S(\vec{v}))] = TR[S(\vec{v})] = [(TR)S](\vec{v})$$

[1]Esto denota que $T, R, S : V \to V$.

[2]Donde $\mathrm{I} : V \to V$ tal que $\mathrm{I}(\vec{v}) = \vec{v}\ \forall\vec{v} \in V$. Usamos un subíndice para señalar en que espacio sucede la transformación, por ejemplo I_V.

Por lo tanto $T(RS) = (TR)S$. (*3.*) Note que

$$(T\mathrm{I})(\vec{v}) = T(\mathrm{I}(\vec{v})) = T(\vec{v}) = \mathrm{I}(T(\vec{v})) = (\mathrm{I}T)(\vec{v})$$

(*4.*) Se tiene que

$$[\lambda(RS)](\vec{v}) = \lambda[(RS)(\vec{v})] = \lambda[R(S(\vec{v}))] = (\lambda R)[S(\vec{v})]$$

Lo que implica que $\lambda(RS) = (\lambda R)S$, sin embargo, es evidente que

$$[R(\lambda S)](\vec{v}) = R[\lambda S(\vec{v})] = (\lambda R)[S(\vec{v})]$$

Por lo tanto $\lambda(RS) = (\lambda R)S = R(\lambda S)$. $\square$

Definición 2.7. *Sean $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $M_{n\times p}(\mathbb{K})$ los espacios vectoriales de las matrices con dimensión $m \times n$ y $n \times p$ con entradas de $\mathbb{K}$. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Definimos el producto de A y B, denotado como AB, donde $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{K})$, como la operación*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \ \textit{donde } i \in \{1, 2, ..., m\} \textit{ y } p = \{1, 2, ..., p\}$$

Note usted que la entrada $(AB)_{ij}$ es la suma de los productos de la i-ésima fila de la matriz A y la j-ésima columna de la matriz B.

Teorema 2.12. *Sean V, W, Z tres espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$), finitamente generados, con sus respectivas bases ordenadas $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$, $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_m\}$ y $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, ..., \vec{z}_p\}$. Sean $T : V \to W$ y $R : W \to Z$ dos transformaciones lineales $\Rightarrow$*

$$[RT]_{\alpha}^{\gamma} = [R]_{\beta}^{\gamma}[T]_{\alpha}^{\beta}$$

Demostración. Sean $A = [R]_{\beta}^{\gamma}$ y $B = [T]_{\alpha}^{\beta}$. Considere la matriz $C = AB = [RT]_{\alpha}^{\gamma}$. Entonces, para $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tenemos

$$\begin{aligned}(RT)(\vec{v}) = R(T(\vec{v}_j)) = R\left(\sum_{k=1}^{m} B_{kj}\vec{w}_k\right) &= \sum_{k=1}^{m} B_{kj}R(\vec{w}_k)\\ &= \sum_{k=1}^{m} B_{kj}\left(\sum_{i=1}^{p} A_{ik}\vec{z}_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}\right)\vec{z}_i\\ &= \sum_{i=1}^{p} C_{ij}\vec{z}_i\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 2.12.1. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$), finitamente generado, sea β una base ordenada de dicho espacio. Sean $T, R \in \mathscr{L}(V) \Rightarrow [RT]_\alpha^\gamma = [R]_\beta^\gamma [T]_\alpha^\beta$.*

Definición 2.8. *Definimos a la delta de Kronecker δ_{ij} tal que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La matriz $I_n \in_n (\mathbb{R})$ es una matriz de con dimensión $n \times n$ cuyas entradas siguen la regla $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.*

Teorema 2.13. *Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. $\forall j \in (1 \leq j \leq p)$, sean u_j y v_j las j-ésimas columnas de AB y B, respectivamente. Entonces*

1. *$u_j = Av_j$.*

2. *$v_j = Be_j$, donde e_j es el j-ésimo vector estándar de $\mathbb{K}^p$.*

Demostración. (*1.*) Se tiene que

$$u_j = \begin{pmatrix} (AB)_{1j} \\ (AB)_{2j} \\ \vdots \\ (AB)_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1k}B_{kj} \\ \sum_{k=1}^n A_{2k}B_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{mk}B_{kj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{mj} \end{pmatrix} = Av_j$$

(*2.*) Tenemos que $Be_j \in \mathbb{K}^m$, y sabemos que $(Be_j)_i = \sum_{k=1}^n B_{ik}(e_j)_i = B_{ij}$, dado que $(e_j)_i = 1$ solo cuando $i = j$, de otro modo $(e_j)_i = 0$. □

Teorema 2.14. *Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$), finitamente generados, con bases ordenadas β y γ respectivamente, y sea $T : V \to W$ una transformación $\Rightarrow$ $\forall \vec{v} \in V$ se tiene que*

$$[T(\vec{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in V$ fija, definimos $f : \mathbb{K} \to V$ con la regla de correspondencia $f(\lambda) = \lambda\vec{v}$ y $g : \mathbb{K} \to W$ con la regla de correspondencia $g(\lambda) = \lambda T(\vec{v})$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$. Sea $\alpha = \{1\}$ la base canónica, y ordenada, de $\mathbb{K}$. Note usted entonces que $g = Tf$. Usando el Teorema 2.12 obtenemos

$$[T(\vec{u})]_\gamma = [g(1)]_\gamma = [g]_\alpha^\gamma = [Tf]_\alpha^\gamma = [T]_\beta^\gamma [f]_\alpha^\beta = [T]_\beta^\gamma [f(1)]_\beta = [T]_\beta^\gamma [\vec{v}]_\beta$$

□

Definición 2.9. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Denotamos a L_A como la función $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $L_A(\vec{x}) = A\vec{x}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Nombramos L_A como la multiplicación por izquierda de la transformación.*

Teorema 2.15. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal. Más aún, si $B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y β y γ son las bases canónicas, y ordenadas, de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, respectivamente, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $[L_A]_\beta^\gamma = A$.
2. $L_A = L_B \iff A = B$.
3. $L_{A+B} = L_A + L_B$ *y* $L_{\lambda A} = \lambda L_A\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
4. *Si* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *es lineal* $\Rightarrow \exists! C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tal que* $T = L_C$*, más aún* $C = [T]_\beta^\gamma$.
5. *Si* $E \in M_{n\times p}(\mathbb{K}) \Rightarrow L_{AE} = L_A L_E$.
6. *Si* $m = n \Rightarrow L_{I_n} = \mathrm{I}_{F^n}$

Demostración. (*1.*) La j-ésima columna de la matriz $[L_A]_\beta^\gamma$ es igual a $L_A(e_j)$. Sin embargo, note usted que $L_A(e_j) = Ae_j$, lo que implica que e_j también es la j-ésima columna de A, por lo tanto $[L_A]_\beta^\gamma = A$. (*2.*) ($\Rightarrow$) Por (*1.*), podemos entonces decir que $[L_A]_\beta^\gamma = A$ y $[L_B]_\beta^\gamma = B \Rightarrow A = B$. El regreso es trivial según Friedberg. (*3.*) *El pinshi de Friedberg lo deja como ejercicio (a ver si lo resuelves Vic).* (*4.*) Sea $C = [T]_\beta^\gamma$. Por el Teorema 2.14 tenemos que $[T(\vec{v})]_\gamma = [T]_\beta^\gamma[\vec{v}]_\beta$. O también que $T(\vec{v}) = C\vec{v} = L_C(\vec{v})\ \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$. La unicidad de C se sigue de (*2.*). (*5.*) $\forall j \in 1, 2, ..., p$ usamos el Teorema 2.13 varias veces para notar que $(AE)_{ej}$ es la j-ésima columna de AE y que esta es igual a $A(E_{e_j})$. Entonces $(AE)_{e_j} = A(E_{ej}) \Rightarrow$

$$L_{AE}(e_j) = (AE)_{ej} = A(E_{e_j}) = L_A(E_{e_j} = L_A(L_E(e_j))$$

Por lo tanto $L_{AE} = L_A L_E$ por el Teorema 2.6. (*6.*) $\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$ tenemos que $L_{I_n}(\vec{x}) = I_n(\vec{x}) = \vec{x}$. □

2.4. Invertibildiad e isomorfismos

Definición 2.10. *Sean V y W dos espacios vectoriales, sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que una función $R : W \to V$ es la inversa de T si $TR = \mathrm{I}_W$ y $RT = \mathrm{I}_V$. Se dice que T es invertible si T tiene una inversa. Si T es invertible entonces la inversa es única y se denota T^{-1}. Más aún, se cumplen las siguientes propiedades*

1. $(TR)^{-1} = R^{-1}T^{-1}$.

2. $(T^{-1})^{-1} = T$, *es decir T^{-1} es invertible.*

3. *Sean V y W dos espacios vectoriales, de dimensión finita, sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice entonces que T es invertible $\iff$ $dim_{\mathbb{K}}(Im(T)) = dim_{\mathbb{K}}(V)$.*

Definición 2.11. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces A es invertible si $\exists! B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B se llama la inversa de A y se denota como A^{-1}.*

Lema 2.1. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal invertible. Se dice que $dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty \iff dim_{\mathbb{K}}(W) < \infty$. Más aún $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que V es de dimensión finita, y sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ una base ordenada de V. Por el Teorema 2.2 sabemos que $\langle T(\beta)\rangle = Im(T) = W$, por lo tanto (por el Teorema 1.18) $dim_{\mathbb{K}}(W) < \infty$. ($\Leftarrow$) Si $dim_{\mathbb{K}}(W) < \infty$, entonces la prueba es análoga a la ida, solo que utilizando T^{-1} con una base de W. Suponga que V y W son de dimensión finita, como T es invertible (T es inyectiva y sobreyectiva), entonces

$$dim_{\mathbb{K}}(N(T)) = 0 \text{ y } dim_{\mathbb{K}}(Im(T)) = dim_{\mathbb{K}}(W)$$

Por el Teorema 2.3 se sigue entonces que $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$. $\square$

Teorema 2.16. *Sean V y W dos espacios vectoriales, finitamente generados (sobre un campo $\mathbb{K}$), donde β y γ son bases ordenadas de V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es invertible $\iff$ $[T]_\beta^\gamma$ es invertible. Más aún, $[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que T es invertible. Por el Lema 2.1, tenemos que $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$, sea $n = dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$. Se igue entonces que $[T]_\beta^\gamma \in M_n(\mathbb{K})$. Por la Definición 2.10 sabemos que $TT^{-1} = \mathrm{I}_W \wedge T^{-1}T = \mathrm{I}_V$

$$\Rightarrow I_n = [\mathrm{I_V}]_\beta = [T^{-1}T]_\beta = [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma$$

Note, también, que

$$I_n = [\mathrm{I_W}]_\gamma = [TT^{-1}]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta$$

Esto implica, por la Definición 2.11, que $[T]_\beta^\gamma$ es invertible y que $[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}$. ($\Leftarrow$) Suponga que $A = [T]_\beta^\gamma$ es invertible $\Rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. Por el Teorema 2.6 $\exists R \in \mathscr{L}(W, V)$ tal que

$$R(\vec{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}\vec{v}_i \text{ para } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Donde $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ y $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$. Esto implica que $B = [R]_\gamma^\beta$. Note usted (por el Teorema 2.12) que

$$[RT]_\beta = [R]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma = BA = I_n = [\mathrm{I}_V]_\beta$$

y que

$$[TR]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [R]_\gamma^\beta = AB = I_n = [\mathrm{I}_W]_\gamma$$

Por lo tanto $R = T^{-1}$, dado que se cumple $RT = \mathrm{I}_V \wedge TR = \mathrm{I}_W$. □

Corolario 2.16.1. *Sea V un espacio vectorial, finitamente generado, sobre un campo $\mathbb{K}$, con una base ordenada β, y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces T es invertible $\iff$ $[T]_\beta$ es invertible. Más aún, $[T^{-1}]_\beta = ([T]_\beta)^{-1}$.*

Demostración. Suponga que $V = W$ y $\beta = \gamma$, entonces la prueba es obvia dado el Teorema 2.16. □

Corolario 2.16.2. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces A es invertible $\iff$ L_A es invertible. Más aún, $L_{A^{-1}} = (L_A)^{-1}$.*

Demostración. Dado el Corolario 2.16.1, si se toma $V = \mathbb{K}^n$ la demostración se sigue del Teorema 2.16. □

Definición 2.12. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Decimos que V es* ***isomorfo*** *a W si $\exists T : V \to W$ tal que T es lineal e invertible. Se dice entonces que T es un* ***isomorfismo*** *de V sobre W.*

Notación 2.2. *Si V es isomorfo a W, entonces se denota $V \approx W \Rightarrow W \approx V$.*

Teorema 2.17. *Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$) finitamente generados. Entonces $V \approx W \iff dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga que V es isomorfo a W, y que $T : V \to W$ es un ismorfismo de V a W. Por el Lema 2.1 sabemos entonces que $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$. ($\Leftarrow$) Suponga que $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(W)$, y sean $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ y $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ bases de V y W, respectivamente. Por el Teorema 2.6 sabemos que $\exists! T : V \to W$ tal que T es lineal y $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Usando el Teorema 2.2 tenemos

$$Im(T) = \langle T(\beta) \rangle = \langle \gamma \rangle = W$$

Esto implica que T es sobreyectiva e inyectiva, por el Teorema 2.5. Por lo tanto T es un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.17.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces V es ismorfo a $\mathbb{K}^n \iff dim_{\mathbb{K}}(V) = n$.*

Teorema 2.18. *Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$), finitamente generados, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $dim_{\mathbb{K}}(W) = m$, y sean $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ y $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, .., \vec{w}_m\}$ bases ordenadas de V y W, respectivamente. Entonces la función*

$$\Phi : \mathscr{L}(V, W) \to M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

definida como $\Phi(T) = [T]_\beta^\gamma$ para $T \in \mathscr{L}(V, W)$, es un isomorfismo.

Demostración. Por el Teorema 2.9 sabemos que Φ es lineal. Basta demostrar que Φ es sobreyectiva e inyectiva. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, por el Teorema 2.6 $\exists! T : V \to W$ tal que

$$T(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \vec{w}_i \quad \text{para } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Lo que implica que $[T]_\beta^\gamma = A$, o bienn que $\Phi(T) = A$, por lo tanto Φ es un isomorfismo. $\square$

Corolario 2.18.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales (sobre un campo $\mathbb{K}$), finitamente generados, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $dim_{\mathbb{K}}(W) = m$. Entonces $\mathscr{L}(V, W)$ es de dimensión finita y $dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{L}(V, W)) = m \cdot n$*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.18 (al probar que Φ es un isomorfismo) y del Teorema 2.17 (por el hecho de que un isomorfismo implica la igualdad de dimensiones entre el dominio y codominio de la transformación). □

Definición 2.13. *Sea V un espacio vectorial, sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, y sea β una base ordenada. La* ***representación estándar de V*** *con respecto a β es la función $\Phi_\beta : V \to \mathbb{K}^n$ definida como $\Phi_\beta(\vec{v}) = [\vec{v}]_\beta \ \forall \vec{v} \in V$.*

Teorema 2.19. *Para todo espacio vectorial V finitamente generado sobre un campo $\mathbb{K}$, con una base ordenada β, se tiene que Φ_β es un isomorfismo.*

Demostración. Por demostrar que (i) Φ_β es lineal y (ii) Φ_β es sobreyectiva e inyectiva. (i) Sean $\vec{u}, \vec{z} \in V$, y sea $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\} \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$ y $\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$. Sea $\eta \in \mathbb{K}$, sabemos que $\vec{u} + \eta\vec{z} \in V$, lo que implica que $\vec{u} + \eta\vec{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i + \eta\mu_i\vec{v}_i = (\lambda_i + \eta\mu_i)\vec{v}_i$. Se sigue entonces que

$$\Phi_\beta(\vec{u} + \eta\vec{z}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \eta\mu_1 \\ \lambda_2 + \eta\mu_2 \\ \vdots \\ \lambda_n + \eta\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \Phi_\beta(\vec{u}) + \eta\Phi_\beta(\vec{z})$$

Por lo tanto Φ_β es una transformación lineal. (ii) Sea $\vec{v} \in V$. Si

$$\Phi_\beta(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces sabemos que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{v}_i = \vec{0}_V$, lo que implica que Φ_β es inyectiva. Además para toda

$$\Phi_\beta(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} + \eta$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n \in \mathbb{K}$, tenemos que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \vec{v}_i$ está asociada a ella. $\square$

2.5. Matrices de cambio de base

Teorema 2.20. *Sean β y β' dos bases ordenadas de un espacio vectorial V, finitamente generado, sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $Q = [\mathrm{I}_V]_{\beta'}^{\beta} \Rightarrow$*

1. *Q es invertible.*

2. *$\forall \vec{v} \in V$ se tiene que $[\vec{v}]_\beta = Q[\vec{v}]_{\beta'}$*

Demostración. (*1.*) Sabemos que I_V es invertible, entonces, por el Teorema 2.16, sabemos que Q es invertible. (*2.*) $\forall \vec{v} \in V$ se tiene que

$$[\vec{v}]_\beta = [\mathrm{I}_V(\vec{v})]_\beta = [\mathrm{I}_V]_{\beta'}^{\beta}[\vec{v}]_{\beta'} = Q[\vec{v}]_{\beta'}$$

por el Teorema 2.14. Por lo tanto Q es la matriz de cambio de base. $\square$

Definición 2.14. *Definimos a la transformación lineal $T : V \to V$ como un **operador lineal** sobre V.*

Teorema 2.21. *Sea V un espacio vectorial, finitamente generado, sobre un campo $\mathbb{K}$, sea T un operador lineal sobre V, y sean β y β' bases ordenadas de V. Suponga que Q es la matriz de cambio de base de β' a β, entonces*

$$[T]_{\beta'} = Q^{-1}[T]_\beta Q$$

Demostración. Sea I la transformación identidad en $V \Rightarrow T = \mathrm{I}T = T\mathrm{I}$, por el Teorema 2.11. Se sigue entonces que

$$Q[T]_{\beta'} = [\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}^{\beta'} = [\mathrm{I}T]_{\beta'}^{\beta} = [T\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta} = [T]_{\beta}^{\beta}[\mathrm{I}]_{\beta'}^{\beta} = [T]_\beta Q$$

Por lo tanto $[T]_{\beta'} = Q^{-1}[T]_\beta Q$. $\square$

Corolario 2.21.1. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, y sea γ una base ordenada de $\mathbb{K}^n \Rightarrow [L_A]_\gamma = Q^{-1}AQ$, donde $Q \in M_n(\mathbb{K})$ y la j-ésima columna de Q es el j-ésimo vector de γ.*

Definición 2.15. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Decimos que B es* ***similar*** *a A si $\exists Q \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = Q^{-1}AQ$.*

Capítulo 3

Espacios con producto interior

3.1. Productos interiores y normas

Definición 3.1. *Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un producto interior en V es una función $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisface lo siguiente*

1. $\forall\, \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V \Rightarrow \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

2. $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in V$ *y* $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

3. $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \overline{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$ *donde* $\bar{\cdot}$ *es el conjugado complejo.*

4. $\forall\, \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ *si* $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Nota 3.1. *Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ donde $z = a + ib$ y $\overline{z} = a - ib \Rightarrow$*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

4. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.

5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

6. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 3.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y para $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumplen lo siguiente*

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.
2. $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
3. $\langle \vec{u}, 0 \rangle = \langle 0, \vec{u} \rangle = 0$.
4. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = 0$.
5. *Si* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \; \forall \vec{u} \in V \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$,

Demostración. (*1.*) Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle &= \overline{\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle} = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle} \\ &= \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle} + \overline{\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

(*2.*)

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \overline{\langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle} = \lambda \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle} = \overline{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

(*3.*) Por la propiedad (*2.*) se tiene que

$$\langle \vec{u}, 0 \rangle = \overline{0} \langle \vec{u}, 0 \rangle = 0$$

y también tenemos que

$$\langle 0, \vec{u} \rangle = \overline{\langle \vec{u}, 0 \rangle} = 0$$

(*4.*) ($\Leftarrow$) Si $\vec{u} = 0 \Rightarrow \langle 0, 0 \rangle = 0$, por la propiedad (*3.*). ($\Rightarrow$) Suponga que $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$.
(*5.*) Si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \; \forall \vec{u} \in V \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0 \; \forall \vec{u} \in V$. Tenemos entonces que $\langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$. □

Definición 3.2. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con producto interior. Para $\vec{u} \in V$, definimos la* ***norma*** *de $\vec{u}$ como $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.*

Teorema 3.2. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con producto interior. Entonces $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ se cumplen las siguientes propiedades*

1. $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.

2. $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = 0$, *de lo contrario* $\|\vec{u}\| \geq 0$.

3. (Desigualdad Cauchy-Schwarz) $|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

4. (Desigualdad del triángulo) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Demostración. (*1.*) Note que

$$\|\lambda\vec{u}\|^2 = \langle \lambda\vec{u}, \lambda\vec{u}\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = |\lambda|^2\|\vec{u}\|^2 = (|\lambda|\|\vec{u}\|)^2 \Rightarrow \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|u\|$$

(*2.*) ($\Rightarrow$) Si $\|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$. ($\Leftarrow$) Si $\vec{u} = 0 \Rightarrow \|0\| = \langle 0, 0\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$, por el Teorema 3.1. (*3.*) Si $\vec{v} = 0$ entonces la prueba es trivial. Asuma que $\vec{v} \neq 0$, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\vec{u} - \lambda\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - \overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \lambda\overline{\lambda}\|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Sea $\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ y $\overline{\lambda} = \frac{\overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}}{\|\vec{v}\|^2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \leq \|\vec{u}\|^2 - \frac{\overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}}{\|\vec{v}\|^2}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle} + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \frac{\overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \|\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|^2}{\|\vec{v}\|^2} = \|\vec{u}\|^2 - \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|^2}{\|\vec{v}\|^2} \\ &\Rightarrow \frac{|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|^2}{\|\vec{v}\|^2} \leq \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

(*4.*) Tenemos que

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\mathfrak{R}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle| + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \text{ (esto usando la desigualdad } \textit{Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.3. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con producto interior. (i) Se dice que $\vec{u}, \vec{v} \in V$ son **ortogonales (o perpendiculares)** si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$. (ii) Se dice que $S \subseteq V$ es un **conjunto ortogonal** si $\vec{u} \perp \vec{v}\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in S$. (iii) Se dice que $\vec{u} \in V$ es un **vector unitario** si $\|\vec{u}\| = 1$. (iv) Se dice que $S \subseteq V$ es un **ortonormal** si S es ortogonal y $\|\vec{u}\| = 1\ \forall \vec{u} \in V$.*

3.2. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Definición 3.4. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con productor interior. Se dice que $\beta \subseteq V$ es una **base ortonormal** de V si es una base ordenada y es ortonormal.*

Teorema 3.3. *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interior, $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ un conjunto ortogonal donde $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ y $\vec{u} \in V$. Si $\vec{u} \in \langle S \rangle \Rightarrow$*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

Demostración. Como $\vec{u} \in \langle S \rangle \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i$. Sea $j \in \{1, 2, ..., k\}$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle \text{ dado que } S \text{ es ortogonal.}$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

□

Corolario 3.3.1. *Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ es un conjunto ortonormal $\Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$.*

Corolario 3.3.2. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con producto interior, y sea $S \subseteq V$ un cojunto ortogonal donde todos los vectores son distintos de cero $\Rightarrow S$ es un cojunto l.i.*

Teorema 3.4. *Sea V un espacio vectorial (sobre un campo $\mathbb{K}$) con producto interior, y sea $S \subseteq V = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ un conjunto l.i. Definimos $S' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ donde $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$ y*

$$\vec{v}_n = \vec{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i \text{ donde } n \in \{2, 3, ..., n\}$$

Entonces S' es un conjunto ortogonal de vectores distintos al cero tales que $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Demostración. Por inducción sobre n. (*Base inductiva*) Si $n = 1 \Rightarrow S = \{\vec{w}_1\} = S'$. (*Hipótesis inductiva*) Supongamos el resultado cierto para $n-1$. (*Paso inductivo*) Por demostrar que (i) S'_n no contiene al cero, (ii) S'_n es ortogonal y (iii) $\langle S'_n \rangle = \langle S_n \rangle$. (i) Sea $S_n = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n\}$ un conjunto l.i. y sea $S'_n = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ como en el Teorema 3.4. Suponga que $\vec{0} \in S'_n$. Como $S_{n-1} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_{n-1}\}$ es l.i. y tiene $n-1$ vectores $\Rightarrow S'_{n-1} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ es un conjunto ortogonal que no contiene al cero, y además, $\langle S'_{n-1} \rangle = \langle S_{n-1} \rangle$. Sabemos que $\vec{0} \in S'_n \wedge \vec{0} \notin S'_{n-1} \Rightarrow \vec{v}_n = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{w}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \vec{v}_j \Rightarrow \vec{w}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \vec{v}_j \in \langle S'_{n-1} \rangle = \langle S_{n-1} \rangle$$

Lo que es una contradicción, porque S_n ya no sería un conjunto l.i $\Rightarrow \vec{0} \notin S'_n$. (ii) Sea $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_n, \vec{v}_i \rangle = \left\langle \vec{w}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \vec{v}_j, \vec{v}_i \right\rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|^2} \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle$$

Como $S\prime_{n-1}$ es ortogonal se tiene que $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \neq 0 \iff j = i$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_n, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle - \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle - \frac{\langle \vec{w}_n, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} \|\vec{v}_i\|^2 = 0$$

Esto implica que S'_n es ortogonal. (iii) Sabemos que

$$\vec{v}_n = \vec{w}_n + \vec{z} \text{ donde } \vec{z} \in \langle S_{n-1} \rangle = \langle S'_{n-1} \rangle$$

$$\Rightarrow \vec{v}_n \in \langle S_n \rangle \Rightarrow S'_n \subseteq \langle S_n \rangle \Rightarrow \langle S'_n \rangle \subseteq \langle S_n \rangle$$

También, note usted que

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \vec{z}$$

$$\Rightarrow \vec{w}_n \in \langle S'_n \rangle \Rightarrow S_n \subseteq \langle S'_n \rangle \Rightarrow \langle S_n \rangle \subseteq \langle S'_n \rangle$$

Por la doble contención $\langle S'_n \rangle \subseteq \langle S_n \rangle \wedge \langle S_n \rangle \subseteq \langle S'_n \rangle \Rightarrow \langle S'_n \rangle = \langle S_n \rangle \therefore$ queda completo el *paso inductivo.* $\square$