

Probabilidad

Matías Carrasco Jiménez
Facultad de Economía, UNAM

6 de octubre de 2025

Índice general

1. Fundamentos	2
1.1. Espacio de Probabilidad	2
1.2. Análisis Combinatorio	7
1.3. Probabilidad Condicional	8
2. Variable Aleatoria	12
3. Momentos de VA	15
3.1. $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}[X]$	15
3.2. Momentos y FGM	19
4. Familias Paramétricas	24
4.1. Discretas	24
4.2. Continuas	32
5. Teoremas de Límite	47
5.1. De Moivre-Laplace	47
5.2. Desigualdades	48
5.3. LGN y TCL	50

Capítulo 1

Fundamentos

Las siguientes son notas de clase del curso de Probabilidad del Act. Servando Valdés Cruz de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Estas notas fueron originalmente escritas por Magali Díaz.

1.1. Espacio de Probabilidad

Definición 1.1. Un espacio de probabilidad es la terna (Ω, \mathcal{F}, P) donde $\Omega \neq \emptyset$ es el espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad.

Definición 1.2. Se dice que \mathcal{F} es una σ -álgebra de subconjuntos de $\Omega \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$(\mathcal{F}_1) \quad \Omega \in \mathcal{F}$ Universalidad

$(\mathcal{F}_2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ Cerrado Bajo Complementos

$(\mathcal{F}_3) \quad A_n \in \mathcal{F} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ Cerrado Bajo Uniones

Teorema 1.1 (Propiedades de σ -álgebra). Sea \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de $\Omega \neq \emptyset \Rightarrow$

$(\mathcal{F}_1) \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \forall n \in \mathbb{N}$ Cerrada Bajo Uniones Finitas

$(\mathcal{F}_2) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$ Conjunto Vacío

$(\mathcal{F}_3) \quad A_n \in \mathcal{F} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ Cerrada Bajo Intersecciones Numerables

$(\mathcal{F}_4) \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F} \forall n \in \mathbb{N}$ Cerrada Bajo Intersecciones Finitas

$(\mathcal{F}_5) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{F}.$ Diferencia de Conjuntos

Proof. Probemos el [Teorema 1.1](#)

(\mathcal{F}_1) Sea $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Definimos una sucesión:

$$B_k = \begin{cases} A_k & \text{si } k \leq n \\ \emptyset & \text{si } k > n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Como cada $B_k \in \mathcal{F}$ por (\mathcal{F}_2)

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

esto por cerradura bajo uniones numerables.

(\mathcal{F}_2) Como $\Omega \in \mathcal{F}$ y \mathcal{F} es cerrada bajo complementos $\Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$.

(\mathcal{F}_3) Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \forall n \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{F}$, y por $(\mathcal{F}_1) \Rightarrow$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

(\mathcal{F}_4) Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, y por $(\mathcal{F}_1) \Rightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)^c \in \mathcal{F}.$$

(\mathcal{F}_5) Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Entonces $A_2^c \in \mathcal{F}$ y, como \mathcal{F} es cerrada bajo intersecciones finitas:

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{F}.$$

\therefore Teorema 1.1 es cierto. □

Definición 1.3 (Evento). Se dice que A es un **evento** $\Leftrightarrow A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega$

Definición 1.4 (Medida de Probabilidad). Se dice que P es una medida de probabilidad \Leftrightarrow

$$(P_1) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(P_2) \quad \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P \geq 0$$

$$(P_3) \quad \text{Si } \{A_i\}_i^\infty \in \mathcal{F} \mid A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall j \neq i \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

Teorema 1.2. Sea P una medida de probabilidad \Rightarrow

$$(P_1) \quad P(\emptyset) = 0.$$

$$(P_2) \quad \text{Sean } A_1, \dots, A_n \text{ eventos ajenos} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

$$(P_3) \quad \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c).$$

$$(P_4) \quad \text{Sean } A, B \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \text{ y } A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \text{ y } P(A) \subseteq P(B).$$

$$(P_5) \quad \text{Sean } A, B \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$(P_6) \quad \text{Sean } A, B, C \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow \\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$(P_7) \quad \text{Se cumple la fórmula de inclusión y exclusión.}$$

$$(P_8) \quad \text{Sean } A, B \text{ dos eventos cualesquiera} \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

$$(P_9) \quad \text{Se cumple la desigualdad de Boole.}$$

Proof. Probemos el [Teorema 1.2](#)

(P_1) Notemos que podemos expresar

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset \quad \text{y ademas} \quad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

Por la [Definición 1.4](#)

$$P(\emptyset \cup \dots \cup \emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Leftrightarrow P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

Ya que

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \text{y ademas} \quad \emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

(P_2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_m = \emptyset$ Notemos que $\forall m \geq n+1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P(A_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

(P_3) Note usted que $\Omega = A + A^c \Rightarrow$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

(P_4) Es fácil ver que $B = A \cup (B \setminus A)$ y que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Se sigue por la [Definición 1.4](#) que

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Ahora, como $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ y $B \setminus A \in \mathcal{F}$, usando la [Definición 1.4](#)

$$\Rightarrow P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

(P_5) Notemos que $A \cup B = A \cup B \setminus A$ y que $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

Note usted que $B \setminus A = B \setminus A \cap B$ y que $(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(P_6) Por (P_5) sabemos lo siguiente

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \Rightarrow$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) &= \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) &= \\ P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) & \end{aligned}$$

(P₇) Sean $\{A_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F}$ cualesquiera n eventos \Rightarrow

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

(P₈) Note que $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, y por (P₅) s.t.q.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

(P₉) Para $n = 1$ tenemos que $P(A_1) \leq P(A_1)$.

Se sigue que $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Por (P₅) tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}\right)$$

Como $P(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1}) \geq 0 \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

\therefore el Teorema 1.2 es cierto. \square

Notación (Función). Una función f es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $f(x) \in B$, lo que denotamos:

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x)$$

En este caso, A es el dominio, B el codominio, y $f(x)$ la imagen de x bajo f .

Observación. P es una función conjuntista.

Definición 1.5 (Monotonía). Sea $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$.

Decimos que es **monótona creciente** si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, en cuyo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Decimos que es **monótona decreciente** si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, en cuyo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Teorema 1.3 (Teorema de Continuidad). Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión monótona de eventos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P) \Rightarrow P(A) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Proof. Caso 1:

$\{A_n\}$ es una sucesión creciente, es decir, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$. Definimos:

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea $B_1 := A_1$ y para $n \geq 2$, definimos $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Entonces los B_n son eventos disjuntos dos a dos, y se cumple que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

donde \bigsqcup denota unión disjunta.

Por la σ -aditividad de la medida de probabilidad:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

Además, como $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$, se tiene que:

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k),$$

y por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = P(A).$$

Caso 2:

$\{A_n\}$ es una sucesión decreciente, es decir, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Definimos:

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Sea $C_n := A_1 \setminus A_n$, que define una sucesión creciente de eventos (ya que $A_n \supseteq A_{n+1} \Rightarrow C_n \subseteq C_{n+1}$), y:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A.$$

Por el caso creciente, sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(A_1) - P(A).$$

Por lo tanto:

$$P(A) = P(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

En ambos casos se cumple que:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

\therefore el Teorema 1.3 es cierto. □

1.2. Análisis Combinatorio

Definición 1.6 (Principio fundamental del conteo). Si hay n caminos para llegar de A a B y m caminos para llegar de B a $C \Rightarrow$ hay $m \times n$ caminos para llegar de A a C .

Definición 1.7 (Ordenación sin repetición). Se desea ordenar sin repetición k elementos tomados de una población n . Donde $0 \leq k \leq n < \infty$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ en total hay

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definición 1.8 (Ordenación con repetición). Se desea ordenar con repetición k elementos tomados de una población n . Donde $0 \leq k \leq n < \infty \wedge n, k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ en total hay

$$\frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \dots \times \frac{n}{k} = n^k$$

Definición 1.9. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, y sean $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$, tales que $\sum_{i=1}^k n_i = n$, entonces definimos la **coeficiente multinomial** como

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Definición 1.10. Supongamos que se tiene una población con n elementos y tomamos de ella una muestra de k elementos sin reemplazo (es decir, sin repetición), entonces el número de **combinaciones** a través de la cual podemos extraer dicha muestra es igual a

$$x = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Teorema 1.4 (Identidad de Vandermonde). Sean $m, n, r \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

Proof. Consideramos un conjunto de $m+n$ elementos, donde m son de tipo A y n son de tipo B. Queremos contar de cuántas maneras podemos escoger r elementos en total.

Por un lado, directamente:

$$\text{Total de maneras de escoger } r \text{ elementos} = \binom{m+n}{r}$$

Se puede hacer por casos según cuántos de los r elementos provienen del grupo A: si tomamos k elementos de A \Rightarrow tomamos $r-k$ de B. Esto se puede hacer de:

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}$$

maneras, y sumando sobre todos los posibles k :

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

\therefore Teorema 1.4 es cierto. □

1.3. Probabilidad Condicional

Notación. La probabilidad condicional de A dado B es denotada como $P(A|B)$

Definición 1.11 (Ley General de la Probabilidad Condicional). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{F}$, donde $P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B)$ se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición 1.12 (Ley General de la Independencia). Se dice que dos eventos $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes si se cumple alguna de las siguientes identidades

$$(I_1) \quad P(A|B) = P(A)$$

$$(I_2) \quad P(B|A) = P(B)$$

$$(I_3) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Corolario. La probabilidad de intersección de dos eventos dependientes $A, B \in \mathcal{F}$ es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Para eventos independientes tenemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proof. Se sigue directamente de la Definición 1.11 y 1.12. \square

Teorema 1.5 (Teorema de Bayes). Sean $A, B \in \mathcal{F}$ con $P(B) \neq 0$. Entonces:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

Proof. Por definición de probabilidad condicional:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Sustituimos el Corolario anterior en la primera ecuación

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

\therefore Teorema 1.5 es cierto. \square

Teorema 1.6. Sean $\{B_1, \dots, B_n\}$ particiones de Ω disjuntas tales que $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $P(B_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)$$

Proof.

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P((A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) = P(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)) = P(A \cap \Omega) = P(A) \end{aligned}$$

\square

Teorema 1.7 (Teorema General de Bayes). Sean $\{B_1, \dots, B_n\}$ particiones de Ω disjuntas tales que $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $P(B_i) > 0 \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F} \subseteq \Omega \Rightarrow$

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}$$

Un evento B_j se llama hipótesis, $P(B_j)$ se llama probabilidad a priori, y $P(B_j|A)$ es una probabilidad a posteriori.

Proof. Por el Teorema 1.6 sabemos que

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

□

Observación. El Teorema 1.5 aplica a dos eventos arbitrarios. El Teorema 1.7 requiere una partición de Ω . El primero es un caso particular del segundo.

Teorema 1.8. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ tal que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0 \Rightarrow$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Proof. Procederemos por inducción matemática sobre n .

(Base inductiva). Tenemos que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

que es la definición de probabilidad condicional, siempre que $P(A_1) > 0$. Así, el resultado se cumple para $n = 2$.

(Paso inductivo). Supongamos que para cierto $k \geq 2$, se cumple:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \prod_{i=1}^k P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Queremos probar que entonces también se cumple para $k + 1$, es decir:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k+1} P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Notamos que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \cap A_{k+1}\right)$$

Usando la definición de probabilidad condicional:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \cdot P\left(A_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

Aplicando la hipótesis inductiva al primer término:

$$= \left(\prod_{i=1}^k P \left(A_i \left| \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \right. \right) \right) \cdot P \left(A_{k+1} \left| \bigcap_{i=1}^k A_i \right. \right)$$

que equivale a:

$$= \prod_{i=1}^{k+1} P \left(A_i \left| \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \right. \right)$$

□

Teorema 1.9. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Sea $Q(\cdot) = P(\cdot|B)$ Entonces $Q(\cdot)$ es una medida de probabilidad donde

$$(Q_1) \quad Q(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(Q_2) \quad Q(\Omega) = 1$$

$$(Q_3) \quad \text{Si } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ tal que } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$$

Proof. Veamos que es cierto

$$(Q_1) \quad Q(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0 \text{ y } P(B) > 0 \Rightarrow Q(A) \geq 0.$$

$$(Q_2) \quad Q(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

(Q₃) Note usted que

$$\begin{aligned} Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)]}{P(B)} \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i) \end{aligned}$$

$\therefore Q$ es una medida de probabilidad. □

Definición 1.13 (Independencia de dos eventos). Sean $A, B \in \mathcal{F}$, se dice que A y B son estrictamente independientes \Leftrightarrow

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow A \perp B \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \therefore A \perp B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Teorema 1.10. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \perp B \Rightarrow$

$$(c_1) \quad A \perp B^c$$

$$(c_2) \quad A^c \perp B$$

$$(c_3) \quad A^c \perp B^c.$$

Proof. Veamos que es cierto

(c₁) Se sigue que

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c)$$

(c_2) De forma análoga a (c_1)

(c_3) Desarrollando, tenemos que

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B^c) &= P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\&= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c)\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Variable Aleatoria

Definición 2.1 (Variable Aleatoria). Dado un experimento en un espacio muestral Ω , una variable aleatoria (VA) X es una función que va de Ω a \mathbb{R} , es decir

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Definición 2.2 (VA Discreta). Decimos que una variable aleatoria X es discreta si hay una lista finita de valores a_1, a_2, \dots, a_n o una lista infinita numerable a_1, a_2, \dots tales que

$$\sum_i P(X = a_i \text{ para alguna } i = 1, 2, \dots) = 1$$

Definición 2.3 (PMF). La función de masa de probabilidad (PMF) de una VA discreta es la función p_X dada por $p_X(X) = P(X = x)$. Formalmente:

$$p(X = x) = P\left(\{s \in \Omega \mid X(s) = x\}\right) = P(X^{-1}(x))$$

Definición 2.4 (CDF). Decimos que la función de distribución acumulada (CDF) de una VA llamada X cualquiera es la función F_X dada por $F_X(x) = P(X \leq x)$ que cumple

$$(\mathcal{C}_1) \text{ Si } x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$

$$(\mathcal{C}_2) \forall a \Rightarrow F_X(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x), \text{ la función es continua por la derecha.}$$

$$(\mathcal{C}_3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

Teorema 2.1. Sea X una VA discreta. Su PMF p_X cumple las siguientes propiedades:

$$(P_1) \forall j \in 1, \dots \Rightarrow p_X(x_j) > 0. \text{ Las VA } X \text{ con probabilidad 0 no se enlistan.}$$

$$(P_2) \sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$$

Proof. La primera es trivial por (P_2) de Definición 1.4. Para la segunda, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = P(X = x_1 \text{ o } X = x_2 \text{ o } \dots) = 1$$

□

Definición 2.5. Decimos que una VA X es continua si su CDF es diferenciable.

Observación. No todas las variables aleatorias continuas tienen función de densidad de probabilidad (PDF) en el sentido clásico, ya que la función de distribución acumulada (CDF) puede no ser diferenciable en todos los puntos.

Definición 2.6 (PDF). Sea $F_X(x)$ la CDF de una VA continua $X \Rightarrow$ denotamos $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

y le llamamos a $f(x)$ la PDF de la VA X .

Notación. Por conveniencia, usamos f_X para referirnos tanto a PMF y PDF.

Corolario. Notemos que podemos escribir a la CDF como

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Definición 2.7. Si una VA continua X tiene una PDF $f(x)$, y se tiene que $a < b$, entonces, la probabilidad de que X caiga en el intervalo $[a, b]$ es

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 2.2. Sea X una VA continua. Su PDF f_X cumple las siguientes propiedades:

$$(P_1) \quad f(x) \geq 0$$

$$(P_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Proof. Notemos que es análogo a una VA discreta, cambiando la suma por la integral. \square

Observación. La PMF da probabilidades exactas en puntos porque la variable es discreta. La PDF no da probabilidades puntuales, sino densidades; la probabilidad se obtiene integrando la PDF en un intervalo. Por eso, la PDF no es una PMF para variables continuas.

Notación. Sea X una variable aleatoria con CDF $F_X(x) = P(X \leq x)$. La función de supervivencia $S_X(x)$ se define como la probabilidad de que X sea mayor que x , es decir,

$$S_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

Definición 2.8. La σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} , denotada $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ -álgebra generada por los intervalos abiertos de \mathbb{R} i.e.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\})$$

donde $\sigma(\cdot)$ denota la operación de generar la sigma-álgebra más pequeña que contiene a ese conjunto.

Notación (Espacio Medible). Un espacio medible es un par (Ω, \mathcal{F}) donde Ω es un conjunto y \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω .

Observación. Todo espacio de probabilidad es un espacio medible.

Definición 2.9 (Función Medible). Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ el espacio real con su σ -álgebra de Borel. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice medible si

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Es decir, la preimagen de cualquier conjunto de Borel es un evento.

Definición 2.10 (Variable Aleatoria Medible). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ el espacio real con su sigma-álgebra de Borel. Una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

se llama variable aleatoria medible si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se cumple que

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Es decir, la preimagen de cualquier conjunto de Borel es un evento en Ω .

Definición 2.11 (Vector Aleatorio Discreto). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Un vector aleatorio discreto en \mathbb{R}^n es una función medible

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que \mathbf{X} toma valores en un subconjunto numerable de \mathbb{R}^n y se cumple

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 1$$

Definición 2.12 (Vector Aleatorio Absolutamente Continuo). Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Decimos que \mathbf{X} es absolutamente continuo si existe una función $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

A esta función $f_{\mathbf{X}}$ se le llama función de densidad conjunta de \mathbf{X} .

Capítulo 3

Momentos de VA

3.1. $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}[X]$

Definición 3.1 (Valor Esperado). Sea X una VA discreta con PMF $f_X(x) = P(X = x)$ y soporte $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$. Supongamos que $\sum_{x \in S} |x|f_X(x) < \infty \Rightarrow$ se define la esperanza de la VA X como

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in S} x f_X(x) \in \mathbb{R}$$

En caso de que X sea una VA continua tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f_X(x) dx < \infty \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \in \mathbb{R}$$

Observación. Sea $0 < p < 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} x p^x &= \sum_{x=1}^{\infty} x p^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} x p^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp} p^x \\ &= p \frac{d}{dp} \sum_{x=1}^{\infty} p^x = p \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{1-p} \right) = p \frac{(1-p)p}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

Lema 3.1. Sea $Y \geq 0$ una VA no negativa y continua $\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y)) dy$

Proof. Como $F_Y(y) = P(Y \leq y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y)) dy &= \int_0^{\infty} P(Y > y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_y^{\infty} f_Y(t) dt \right) dy = \int_0^{\infty} \int_0^t (f_Y(t) dy) dt \\ &= \int_0^{\infty} f_Y(t) \left(\int_0^t dy \right) dt = \int_0^{\infty} t f_Y(t) dt = \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

□

Observación. Recordemos que F_Y es la función de distribución, f_Y su derivada: la densidad.

Teorema 3.1. Sea X una VA continua. Sea $g(x)$ cualquier función no negativa real de X

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Proof. Por el [Lema 3.1](#), tenemos que

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_0^{\infty} P(g(x) > y) dy = \int_0^{\infty} \left[\int_{\{x \in \mathbb{R} | g(x) > y\}} f_X(x) dx \right] dy$$

Integramos en la región de $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid 0 < y < g(x) < \infty\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\{x \in \mathbb{R} | g(x) > y\}} \left(\int_0^{g(x)} f_X(x) dy \right) dx &= \int_{\{x \in \mathbb{R} | g(x) > y\}} f_X(x) \left(\int_0^{g(x)} dy \right) dx \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{R} | g(x) > y\}} g(x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

□

Corolario. En caso de ser una VA discreta tenemos que

$$\mathbb{E}[g(x)] = \sum_{X \in S} g(x) f_X(x)$$

Proof. Análogo al [Teorema 3.1](#).

□

Ejemplo 3.1. Sea X una VA con FDP

$$f_X(x) = \frac{e^{-1}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Proof. Encontremos $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-1}}{x!}$$

Sea $y = x - 1$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(x-1)!} = e^{-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y!} = e^{-1} \cdot e = \frac{e}{e} = 1$$

Sea $g(x) = x^2$.

Ahora calculemos $\mathbb{E}[X^2]$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{e^{-1}}{x!}$$

Sea $y = x - 1$

$$\begin{aligned} &= e^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{(x-1)!} = e^{-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{y+1}{y!} = e^{-1} \left[\sum_{y=0}^{\infty} \frac{y}{y!} + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y!} \right] \\ &= \frac{e + e}{e} = \frac{2e}{e} = 2 \end{aligned}$$

□

Observación. $\mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$

Teorema 3.2 (Propiedades del Valor Esperado). $\mathbb{E}[\cdot]$ cumple con lo siguiente

$$(\mathbb{E}_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}[\lambda] = \lambda$$

$$(\mathbb{E}_2) \quad \text{Para cualesquiera dos funciones } g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[\lambda_1 g_1 \pm \lambda_2 g_2 + \lambda_3] = \lambda_1 \mathbb{E}[g_1] \pm \lambda_2 \mathbb{E}[g_2] + \lambda_3$$

$$(\mathbb{E}_3) \quad \text{Sea } X \text{ una VA no negativa } P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$$

$$(\mathbb{E}_4) \quad \text{Sean } g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \text{ Si } g_1(X) \geq g_2(X) \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[g_1(X)] \geq \mathbb{E}[g_2(X)]$$

$$(\mathbb{E}_5) \quad \text{Sea } X \text{ una VA cualquiera con esperanza } \mathbb{E}[X] \Rightarrow \mathbb{E}[|X|] \geq |\mathbb{E}[X]|$$

$$(\mathbb{E}_6) \quad \text{Sea } X \text{ una VA con FDP } f_X(x) \text{ continua y soporte } S = \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx$$

$$(\mathbb{E}_7) \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow |X(\omega)| < M \text{ t.q. } M > 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq M < \infty$$

Proof. Probemos el Teorema 3.2

$$(\mathbb{E}_1) \quad \mathbb{E}[\lambda] = \int_{-\infty}^\infty \lambda f_X(x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty f_X(x) = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

$$(\mathbb{E}_2) \quad \mathbb{E}[\lambda_1 g_1 \pm \lambda_2 g_2 + \lambda_3] = \int_{-\infty}^\infty (\lambda_1 g_1 \pm \lambda_2 g_2 + \lambda_3) f_X(x) dx = \lambda_1 \mathbb{E}[g_1] \pm \lambda_2 \mathbb{E}[g_2] + \lambda_3$$

$$(\mathbb{E}_3) \quad P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow x f_X(x) \geq 0 \Rightarrow \int x f_X(x) dx \geq \int 0 dx \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq 0$$

$$(\mathbb{E}_4) \quad \text{Notemos que}$$

$$g_1(X) \geq g_2(X) \Rightarrow g_1(X) - g_2(X) \geq 0$$

Por el inciso (\mathbb{E}_3) s.t.q.

$$\mathbb{E}[g_1(X) - g_2(X)] \geq 0$$

Y ahora, por (\mathbb{E}_2) s.t.q.

$$\mathbb{E}[g_1(X)] - \mathbb{E}[g_2(X)] \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[g_1(X)] \geq \mathbb{E}[g_2(X)]$$

$$(\mathbb{E}_5) \quad \mathbb{E}[-|X|] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[|X|] \Rightarrow -\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[|X|] \Rightarrow \mathbb{E}[|X|] \geq |\mathbb{E}[X]|$$

$$(\mathbb{E}_6) \quad \text{Notemos que}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx + \int_0^\infty x f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \end{aligned}$$

\therefore es cierto el Teorema 3.2. □

Observación. Una VA X no tiene esperanza finita cuando $\mathbb{E}[X] = \infty$

Definición 3.2 (Varianza). Sea X una VA tal que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Definimos la varianza de X , denotada como $\text{Var}[X]$ o σ^2 , como

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \text{ donde } \mu = \mathbb{E}[X]$$

Observación. Esto significa que $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Notación. Escribimos en el caso discreto y en el caso continuo respectivamente

$$\sum_{\forall X} (X - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx$$

Teorema 3.3 (Propiedades de la Varianza). Sea X una VA con $\mathbb{E}[X^2] < \infty \Rightarrow \text{Var}[X]$ cumple con lo siguiente

- (σ_1^2) $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$
- (σ_2^2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Var}[\lambda \cdot X] = \lambda^2 \cdot \text{Var}[X]$
- (σ_3^2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Var}[X + \lambda] = \text{Var}[X]$
- (σ_4^2) $\text{Var}[X] \geq 0$
- (σ_5^2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Var}[X] = 0 \Leftrightarrow X = \lambda$

Proof. Probemos el [Teorema 3.3](#)

- (σ_1^2) $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X - \mu]^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2$
 $= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$
- (σ_2^2) $\text{Var}[\lambda \cdot X] = \mathbb{E}[(\lambda X - \mathbb{E}[\lambda X])^2] = \mathbb{E}[(\lambda X - \lambda\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[\lambda^2(X - \mathbb{E}[X])^2]$
 $\lambda^2 \cdot \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \lambda^2 \cdot \text{Var}[X]$
- (σ_3^2) $\text{Var}[X + \lambda] = \mathbb{E}[(X + \lambda - \mathbb{E}[X + \lambda])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X]$
- (σ_4^2) Trivial por (\mathbb{E}_3) del [Teorema 3.2](#).
- (σ_5^2) \Leftarrow Supongamos que $X = \lambda$

$$\text{Var}[\lambda] = \mathbb{E}[(\lambda - \mathbb{E}[\lambda])^2] = \mathbb{E}[(\lambda - \lambda)^2] = \mathbb{E}[0] = 0$$

\Rightarrow Supongamos que $\text{Var}[X] = 0$

$$0 = \text{Var}[X] = \sum_{\forall X} (X - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\forall X} (X - \mathbb{E}[X])^2 = 0 \Rightarrow X = \mathbb{E}[X]$$

$$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega \Rightarrow X(\omega) = \mathbb{E}[X] = \lambda$$

\therefore es cierto el [Teorema 3.3](#). □

Definición 3.3 (Desviación Estandar). Se define como la raíz positiva de la [Definición 3.2](#)

$$\text{SD}[X] = \sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

3.2. Momentos y FGM

Definición 3.4 (r-ésimo momento). Sea X una VA y $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\mathbb{E}[X^r] < \infty \Rightarrow$ se define al r-ésimo momento de la VA X como $\mathbb{E}[X^r]$

Ejemplo 3.2 (r-ésimo momento alrededor de λ). Sea X una VA tal que $\mathbb{E}[X^r] < \infty$, se define al r-ésimo momento alrededor de λ como

$$\mathbb{E}[(X - \lambda)^r]$$

Ejemplo 3.3 (r-ésimo momento central). Del [Ejemplo 3.2](#) cuando tomamos a $\lambda = \mathbb{E}[X]$ s.t.q.

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^r]$$

Observación. Notemos que la varianza es el segundo momento central de X .

Notación. Cuando $r = 3$ llamamos al tercer momento el coeficiente de asimetría α .

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

Cuando $r = 4$ llamamos al cuarto momento el coeficiente de kurtosis \mathcal{K} .

$$\mathcal{K} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

Definición 3.5 (Función Generadora de Momentos). Sea X una VA con FDP $f_X(x)$ y $h > 0$. Supongamos que $\forall t \in (-h, h)$ s.t.q. $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$. Se define a la FGM como

$$m_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$$

donde $m_X(t)$ es una función de valor real.

Notación. Escribimos a la FGM en el caso discreto y en el caso continuo respectivamente

$$m_X(t) = \sum_{x \in X} e^{tx} f_X(x) \qquad m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Lema 3.2. Sea X una VA con n -ésimo momento finito.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|X^n|] = n \int_0^{\infty} x^{n-1} (1 - F_X(x)) + n \int_0^{\infty} |x|^{n-1} F_X(-x)$$

Proof. Notemos que

$$\mathbb{E}[|X^n|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f_X(x) = \int_{-\infty}^0 |x|^n f_X(x) dx + \int_0^{\infty} |x|^n f_X(x) dx$$

Simplificaremos estas dos expresiones para llegar al resultado

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |x|^n f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 -x^n f_X(x) dx \\ &= (-x^n) F_X(x) \Big|_{-\infty}^0 + n \int_{-\infty}^0 (-x)^{n-1} F_X(x) dx = 0 + n \int_0^{\infty} |x|^{n-1} F_X(-x) \end{aligned}$$

Lo cual consiste en la segunda parte de la igualdad.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x|^n f_X(x) dx &= \int_0^\infty x^n f_X(x) dx \\ &= -x^n(1 - F_X(x)) \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1}(1 - F_X(x)) = n \int_0^\infty x^{n-1}(1 - F_X(x)) \end{aligned}$$

Lo cual comprueba al [Lema 3.2](#) \square

Lema 3.3. Sea $h > 0$ y X una VA cuya FGM $m_X(t)$ existe para $t \in (-h, h)$

$$\Rightarrow m_X(t) = 1 + t \left[\int_0^\infty (1 - F_X(x)) e^{tx} dx - \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x) dx \right]$$

Proof. Notemos lo siguiente

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{tx} f_X(x) dx + \int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx$$

Simplificamos, primero a la primera porción de la suma.

$$\int_{-\infty}^0 e^{tx} f_X(x) dx = e^{tx} F_X(x) \Big|_{-\infty}^0 - t \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x) dx = F_X(0) - t \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x) dx$$

Ahora, simplificamos la segunda.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx &= -e^{tx}(1 - F_X(x)) \Big|_0^\infty + t \int_0^\infty e^{tx} dx(1 - F_X(x)) \\ &= 1 - F_X(0) + t \int_0^\infty e^{tx} dx(1 - F_X(x)) \end{aligned}$$

Ahora combinamos ambos resultados

$$\begin{aligned} F_X(0) - t \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x) dx + 1 - F_X(0) + t \int_0^\infty e^{tx} dx(1 - F_X(x)) \\ = 1 + t \left[\int_0^\infty (1 - F_X(x)) e^{tx} dx - \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x) dx \right] \end{aligned}$$

\therefore el [Lema 3.3](#) es cierto. \square

Teorema 3.4 (Propiedades de FGM). Sea X una VA $\Rightarrow m_X(t)$ cumple con lo siguiente

$$(m_1) \quad m_X(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k \mathbb{E}[X^k]}{k!}$$

$$(m_2) \quad m_X(0) = 1$$

$$(m_3) \quad \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mathbb{E}[X]$$

$$(m_4) \quad \frac{d^n}{dt^n} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mathbb{E}[X^n]$$

$$(m_5) \quad \text{Sea } X \text{ una VA con FGM } m_X(t). \text{ Sea } Y = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

$$\Rightarrow m_Y(t) = e^{bt} m_X(at)$$

$$(m_6) \quad \text{Sean } X, Y \text{ VAs } \Rightarrow m_X(t) = m_Y(t) \Leftrightarrow f_X = f_Y$$

$$(m_7) \quad \text{Sea } h > 0 \text{ y } X \text{ VA con FGM } m_X(t) < \infty \text{ para } -h < t < h \Rightarrow \mathbb{E}[X^n] \text{ existe } \forall n \geq 1$$

Proof. Probemos el [Teorema 3.4](#)

(m_1) Note que, por Taylor, por teorema de convergencia denominada y por el [Teorema 3.1](#)

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tk)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{(tk)^k}{k!}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} = 1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2 \mathbb{E}[X^2]}{2} + \frac{t^3 \mathbb{E}[X^3]}{6} + \dots \end{aligned}$$

(m_2) $\mathbb{E}[e^{0x}] = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$

(m_3) Tomemos la primera derivada de la FGM, y por (m_1) s.t.q.

$$m'_X(t) = \frac{d}{dt} \left[1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + \dots \right] = \mathbb{E}[X] + t\mathbb{E}[X^2] + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^3] + \dots$$

Evaluando en $t = 0$

$$\mathbb{E}[X] + 0 \cdot \mathbb{E}[X^2] + \frac{0^2}{2}\mathbb{E}[X^3] + \dots = \mathbb{E}[X]$$

(m_4) Por inducción para $n \geq 1$.

(m_5) $m_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{t(ax+b)}] = \mathbb{E}[e^{atx+tb}] = \mathbb{E}[e^{atx}e^{tb}] = e^{tb}\mathbb{E}[e^{atx}] = e^{bt}m_X(at)$

(m_6) $m_X(t) = m_Y(t) \Leftrightarrow \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[e^{tY}] \Leftrightarrow f_X = f_Y$

(m_7) Ya que $X < |X|$, basta probar que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Por el [Lema 3.2](#) basta probar:

$$\int_0^{\infty} x^{n-1}(1 - F_X(x))dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^0 |x|^{n-1}F_X(x)dx < \infty$$

Primero, notemos que para $t \in (-h, h)$

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{tx}(1 - F_X(x))dx < \infty$$

Tomamos a $t \in (0, h) \Rightarrow \frac{(tx)^{n-1}}{(n-1)!} < e^{tx} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^{n-1} &< \frac{(n-1)! \cdot e^{tx}}{t^{n-1}} \Rightarrow x^{n-1}(1 - F_X(x)) < \frac{(n-1)! \cdot e^{tx}}{t^{n-1}}(1 - F_X(x)) \\ &\Rightarrow \int_0^{\infty} x^{n-1}(1 - F_X(x))dx < \int_0^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot e^{tx}}{t^{n-1}}(1 - F_X(x))dx \end{aligned}$$

Viendo el comienzo de la desigualdad, y por el [Lema 3.3](#), s.t.q.

$$= \frac{(n-1)!}{t^{n-1}} \int_0^{\infty} e^{tx}(1 - F_X(x))dx < \infty$$

Segundo, como lo pasado viene de $m_X(t) < \infty$, notemos que si $t \in (-h, 0)$

$$t \int_{-\infty}^0 e^{tx} F_X(x)dx < \infty \Rightarrow tx > 0$$

Ahora, notemos qué

$$\frac{|tx|^{n-1}}{(n-1)!} \leq e^{|tx|} = e^{tx} \Rightarrow |x|^{n-1} < \frac{e^{tx}(n-1)!}{|t|^{n-1}}$$

Ahora, como anteriormente, aplicamos esta integral.

$$\int_{-\infty}^0 |x|^{n-1} F_X(x) dx < \int_{-\infty}^0 \frac{(n-1)! \cdot e^{tx}}{|t|^{n-1}} F_X(x) dx < \infty$$

Hemos probado ambas desigualdades $\therefore \forall n \geq 1 \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^n] < \infty$

\therefore el Teorema 3.4 es cierto. \square

Definición 3.6 (Función Cumulante). Sea X una VA con FGM $m_X(t) < \infty$ para $t \in (-h, h)$. Se define a la función $\Psi_X(t)$ como

$$\Psi_X(t) := \ln[m_X(t)]$$

Teorema 3.5 (Propiedades de Ψ). Sea X una VA con FGM $m_X(t) < \infty$ para $t \in (-h, h) \Rightarrow \Psi_X(t)$ cumple con lo siguiente

$$(\Psi_1) \quad \Psi_X(0) = 0$$

$$(\Psi_2) \quad \frac{d}{dt} \Psi_X(t) \big|_{t=0} = \mathbb{E}[X]$$

$$(\Psi_3) \quad \frac{d^2}{dt^2} \Psi_X(t) \big|_{t=0} = \text{Var}[X]$$

Proof. Probemos el Teorema 3.5

$$(\Psi_1) \quad \Psi_X(0) = \ln[m_X(0)] = \ln[1] = 0$$

$$(\Psi_2) \quad \frac{d}{dt} \Psi_X(t) = \frac{d}{dt} \ln[m_X(t)] = \frac{m'_X(t)}{m_X(t)} \big|_{t=0} = \frac{\mathbb{E}[X]}{1} = \mathbb{E}[X]$$

(Ψ_3) Notemos, por (Ψ_2) que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Psi_X(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \ln[m_X(t)] = \frac{m'_X(t)}{m_X(t)} \big|_{t=0} = \frac{m_X(t)m''_X(t) - m'_X(t)m'_X(t)}{(m'_X(t))^2} \\ &= m''_X(0) - (m'_X(0))^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \text{Var}[X] \end{aligned}$$

\therefore es cierto el Teorema 3.5. \square

Definición 3.7 (Percentiles). Sean X una VA y $0 < p < 1$. Se define el percentil $p100\%$ como $\pi_p \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(x \leq \pi_p) = p \quad \text{y} \quad P(x > \pi_p) = 1 - p$$

Definición 3.8 (Mediana). La mediana es el percentil 50% oara X i.e. $\text{Me} = \pi_{0,5}$

Definición 3.9 (Cuartiles). Aquellos valores que dividen la distribución en cuatro partes.

Observación. Los mediana es el segundo cuartil.

Definición 3.10 (Moda). Sea X una VA con FDP $f_X(x)$. La moda de X es el valor $Mo \in \mathbb{R}$ que maximiza a $f_X(x)$.

En el caso continuo, es el máximo de $f_X(x)$

En el caso discreto, es $Mo = x$ tal que

$$\frac{f(x_j)}{f(x_{j-1})} \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{f(x_j)}{f(x_{j+1})} \leq 1$$

Observación. En caso en el que Mo es unico, se dice que es una distribución unimodal. Si tiene dos, es bimodal. Si tiene más, se le llama multimodal.

Definición 3.11 (Covarianza). Sean X y Y dos variables aleatorias con esperanza finita. La covarianza entre X y Y se define como

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Equivalentemente, si $\mathbb{E}[XY]$ existe,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Definición 3.12 (Matriz de Covarianza). Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con medias finitas. La matriz de covarianza de \mathbf{X} es la matriz simétrica definida por

$$\Sigma = \text{Cov}(\mathbf{X}) = [\text{Cov}(X_i, X_j)]_{i,j=1}^n$$

Es decir, Σ es una matriz $n \times n$ donde la entrada (i, j) es la covarianza entre X_i y X_j

Definición 3.13 (Vector Aleatorio Gaussiano). Un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ en \mathbb{R}^n se dice gaussiano si para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, la combinación lineal $Y = \mathbf{a}^\top \mathbf{X}$ es una variable aleatoria normal unidimensional, i.e.

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Equivalentemente, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ con vector de medias $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y matriz de covarianza $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica definida positiva.

Definición 3.14 (Esperanza Condicional). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria integrable, y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra. La esperanza condicional de X dado \mathcal{G} , denotada $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$, es cualquier variable aleatoria \mathcal{G} -medible que satisface

$$\forall G \in \mathcal{G} \Rightarrow \int_G \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \int_G X dP$$

Definición 3.15 (Varianza Condicional). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria cuadrado integrable, y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra. La varianza condicional de X dado \mathcal{G} , denotada $\text{Var}(X | \mathcal{G})$, es la variable aleatoria \mathcal{G} -medible definida por

$$\text{Var}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}])^2 | \mathcal{G}]$$

Además, cumple

$$\forall G \in \mathcal{G} \Rightarrow \int_G \text{Var}(X | \mathcal{G}) dP = \int_G (X - \mathbb{E}[X | \mathcal{G}])^2 dP$$

Capítulo 4

Familias Paramétricas

4.1. Discretas

Definición 4.1 (Distribución Uniforme Discreta). Decimos que una VA X tiene distribución uniforme discreta en los valores x_1, x_2, \dots, x_n (es decir, toma valores finitos con igual probabilidad)

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$f(x) = \mathcal{U}(x; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

donde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$

Observación. En algunos casos, los parámetros de \mathcal{U} son $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $n = b - a + 1$

Teorema 4.1 (PMF de Uniforme Discreta). Sea $X \sim \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n)$ su PMF $f(x)$ cumple

$$(\mathcal{U}_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(\mathcal{U}_2) \quad \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$$

Proof. Veamos que **Teorema 4.1** es cierto.

$$(\mathcal{U}_1) \quad \frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(\mathcal{U}_2) \quad \sum_{x \in \{x_1, \dots, x_n\}} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

\therefore **Teorema 4.1** es cierto. □

Teorema 4.2 (Uniforme Discreta). Sea $X \sim \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$

$$(\mathcal{U}_1) \quad m_X(t) = \frac{e^t(1-e^{tn})}{n(1-e^t)} \quad \text{FGM}$$

$$(\mathcal{U}_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2} \quad \text{Esperanza}$$

$$(\mathcal{U}_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sean $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, n\})$, es decir, $P(X = k) = \frac{1}{n}$ para $k = 1, \dots, n$.

(\mathcal{U}_1) Tomamos la FGM

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{tk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tk} = \frac{1}{n} \cdot e^t \cdot \frac{1 - e^{tn}}{1 - e^t} = \frac{e^t(1 - e^{tn})}{n(1 - e^t)}$$

(\mathcal{U}_2) Para la esperanza s.t.q.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

(\mathcal{U}_3) Para la esperanza s.t.q.

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6} \left(2n+1 - \frac{3(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

\therefore Teorema 4.2 es cierto. □

Definición 4.2 (Distribución Bernoulli). Decimos que una VA X tiene distribución Bernoulli con parámetro p (es decir, probabilidad de éxito p)

$$X \sim \text{Bern}(p)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$f(x) = \text{Bern}(x; p) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ q = 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $p \in [0, 1]$ y $P(X = 1) = p$ y $P(X = 0) = 1 - p$

Observación. La distribución Bernoulli modela eventos discontinuos, es decir, con dos posibles resultados: los cuales se denominan éxito o fracaso.

Teorema 4.3 (PMF de Bernoulli). Sea $X \sim \text{Bern}(p)$ su PMF $f(x)$ cumple

$$(B_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$$

Proof. Veamos que Teorema 4.3 es cierto.

$$(B_1) \quad p \in [0, 1] \Rightarrow 1 - p \geq 0 \text{ y también } p \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \sum_{x \in \{0,1\}} f(x) = (1 - p) + p = 1$$

\therefore Teorema 4.3 es cierto. □

Teorema 4.4 (Bernoulli). Sea $X \sim \text{Bern}(p) \Rightarrow$

$$(B_1) \quad m_X(t) = (1-p) + pe^t$$

FGM

$$(B_2) \quad \mathbb{E}[X] = p$$

Esperanza

$$(B_3) \quad \text{Var}[X] = p(1-p)$$

Varianza

Proof. Sea $X \sim \text{Bern}(p)$, es decir, $P(X=1) = p$ y $P(X=0) = 1-p$.

(B₁) Tomamos la FGM:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t \cdot 0}(1-p) + e^{t \cdot 1}p = (1-p) + pe^t$$

(B₂) Para la esperanza, notemos que:

$$\mathbb{E}[X] = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$$

(B₃) Finalmente, para la varianza:

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

\therefore Teorema 4.4 es cierto. □

Definición 4.3 (Distribución Binomial). Decimos que una VA X tiene distribución binomial con parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0, 1]$

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

donde n es el número de ensayos y p la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Teorema 4.5 (PMF de Binomial). Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$ su PMF $f(k)$ cumple

$$(B_1) \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f(k) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \sum_{k=0}^n f(k) = 1$$

Proof. Veamos que Teorema 4.5 es cierto.

$$(B_1) \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 0 \Rightarrow f(k) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1-p)^n = 1^n = 1$$

Esto por el teorema del binomio, que postula

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k \cdot x^{n-k}$$

\therefore Teorema 4.5 es cierto. □

Observación. Notemos que si $n=1 \Rightarrow X \sim \text{Bern}$

Teorema 4.6. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$ y definamos a $q = 1 - p \Rightarrow n - X \sim \text{Bin}(n, q)$

Proof. Veamos que $n - X$ tiene la PDF de la binomial. Sea $Y = n - x$

$$P(Y = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n - k} p^{n - k} (q)^k = \binom{n}{k} q^k (p)^{n - k}$$

□

Teorema 4.7 (Binomial). Sea $X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow$

(B₁) $m_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$

FGM

(B₂) $\mathbb{E}[X] = np$

Esperanza

(B₃) $\text{Var}[X] = np(1 - p)$

Varianza

Proof. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$, es decir, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$ para $k = 0, \dots, n$.

(B₁) Tomamos la FGM:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1 - p)^{n - k} = (pe^t + 1 - p)^n$$

(B₂) Por Teorema 3.4 derivamos $m_X(t)$ y evaluamos en $t = 0$

$$\begin{aligned} m'_X(t) &= n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X] &= m'_X(0) = n(p + 1 - p)^{n-1} p = np \end{aligned}$$

(B₃) Derivamos dos veces $m_X(t)$ y evaluamos en $t = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m''_X(t) &= n(n - 1)(pe^t + 1 - p)^{n-2} (pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t \\ \Rightarrow m''_X(0) &= n(n - 1)p^2 + np = np((n - 1)p + 1) \\ \Rightarrow \text{Var}[X] &= m''_X(0) - (m'_X(0))^2 = np((n - 1)p + 1) - (np)^2 = np(1 - p) \end{aligned}$$

\therefore Teorema 4.7 es cierto.

□

Observación. En esta distribución X contabiliza el número de éxitos u ocurrencias que suceden en n ensayos de Bernoulli independientes.

Definición 4.4 (Distribución Poisson). Decimos que una VA X tiene distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

si y solo si su función de masa de probabilidad es la siguiente

$$P(X = k) = \text{Pois}(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Observación. Esta distribución es comúnmente utilizada para modelar eventos de extraña ocurrencia. También se usa en el conteo de eventos en un periodo de tiempo determinado.

Teorema 4.8 (PMF de Poisson). Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ su PMF $f(k)$ cumple

$$(P_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(k) \geq 0$$

$$(P_2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$$

Proof. Veamos que Teorema 4.8 es cierto.

$$(P_1) \quad f(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \geq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0 \text{ pues } \lambda > 0 \text{ y factoriales son positivos.}$$

$$(P_2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

\therefore Teorema 4.8 es cierto. □

Teorema 4.9 (Poisson). Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow$

$$(P_1) \quad m_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

FGM

$$(P_2) \quad \mathbb{E}[X] = \lambda$$

Esperanza

$$(P_3) \quad \text{Var}[X] = \lambda$$

Varianza

Proof. Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, es decir, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

(P₁) Tomamos la FGM:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

(P₂) Usamos la función cumulante $\Psi_X(t) = \ln m_X(t) = \lambda(e^t - 1)$ y (Ψ_2) del Teorema 3.5

$$\Psi'_X(t) = \lambda e^t \mid_{t=0} \Rightarrow \Psi'_X(0) = \lambda = \mathbb{E}[X]$$

(P₃) Derivando de nuevo y evaluando en $t = 0$:

$$\Psi''_X(t) = \lambda e^t \mid_{t=0} \Rightarrow \text{Var}[X] = \Psi''_X(0) = \lambda = \text{Var}[X]$$

\therefore Teorema 4.9 es cierto. □

Observación. La moda de la Poisson es $\lfloor \lambda \rfloor$ si $\lambda \notin \mathbb{Z}^+$, y tanto λ y $\lambda - 1$ si $\lambda \in \mathbb{Z}^+$

Definición 4.5 (Distribución Geométrica). Decimos que una VA Y tiene distribución geométrica con parámetro $p \in (0, 1]$

$$Y \sim \text{Geo}(p)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$P(Y = k) = \text{Gem}(k; p) = (1 - p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

donde $p \in (0, 1]$ representa la probabilidad de éxito en un solo ensayo, y $k \in \mathbb{N}_0$ contabiliza el número de fracasos que se presentan antes del primer éxito en ensayos $\sim \text{Bern}(p)$

Teorema 4.10 (PMF de Geométrica). Sea $Y \sim \text{Geom}(p)$ su PMF $f(k)$ cumple

$$(G_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(k) \geq 0$$

$$(G_2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$$

Proof. Veamos que Teorema 4.10 es cierto.

$$(G_1) \quad f(k) = (1-p)^k p \geq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0 \text{ pues } p \in (0, 1]$$

$$(G_2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Esto por la fórmula de la suma de una serie geométrica.

\therefore Teorema 4.10 es cierto. \square

Teorema 4.11 (Geométrica). Sea $Y \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow$

$$(G_1) \quad m_Y(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \text{ para } t < -\ln(1-p) \quad \text{FGM}$$

$$(G_2) \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{1-p}{p} \quad \text{Esperanza}$$

$$(G_3) \quad \text{Var}[Y] = \frac{1-p}{p^2} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $Y \sim \text{Geom}(p)$, es decir, $P(Y = k) = (1-p)^k p$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

(G₁) Tomamos la FGM:

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} (1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} [(1-p)e^t]^k \\ &= \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad \text{para } t < -\ln(1-p) \end{aligned}$$

(G₂) Usamos la función cumulante $\Psi_Y(t) = \ln m_Y(t) = \ln p - \ln(1-(1-p)e^t)$ y (Ψ_2) del Teorema 3.5

$$\Psi'_Y(t) = \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} \Big|_{t=0} = \frac{1-p}{p} = \mathbb{E}[Y]$$

(G₃) Derivando de nuevo y evaluando en $t = 0$:

$$\Psi''_Y(t) = \frac{(1-p)e^t[1-(1-p)e^t] + (1-p)^2 e^{2t}}{[1-(1-p)e^t]^2} \Rightarrow \Psi''_Y(0) = \frac{1-p}{p^2} = \text{Var}[Y]$$

\therefore Teorema 4.11 es cierto. \square

Definición 4.6 (Binomial Negativa). Una VA X es binomial negativa con parámetros $r \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1]$

$$X \sim \text{NegBin}(r, p)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$P(X = k) = \text{NegBin}(k; r, p) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

donde X cuenta el número de fracasos antes del r -ésimo éxito en ensayos i.i.d $\sim \text{Bern}(p)$.

Teorema 4.12 (PMF de Binomial Negativa). Sea $X \sim \text{NegBin}(r, p)$ su PMF $f(k)$ cumple

$$(B_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(k) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$$

Proof. Veamos que Teorema 4.12 es cierto.

$$(B_1) \quad f(k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r \geq 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0, \text{ pues } r \in \mathbb{N} \text{ y } p \in (0, 1]$$

$$(B_2) \quad \text{Para } 0 < p < 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k \\ &= p^r \cdot \left(\frac{1}{1-(1-p)} \right)^r = p^r \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^r = 1 \end{aligned}$$

Esto por la fórmula del desarrollo de la serie binomial negativa.

\therefore Teorema 4.12 es cierto. □

Teorema 4.13 (Binomial Negativa). Sea $X \sim \text{NegBin}(r, p) \Rightarrow$

$$(B_1) \quad m_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t} \right)^r, \text{ para } t < -\ln(1-p) \quad \text{FGM}$$

$$(B_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{Esperanza}$$

$$(B_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $X \sim \text{NegBin}(r, p)$, es decir, $P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

(B₁) Tomamos la FGM:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} [(1-p)e^t]^k$$

Y notemos que, para $t < -\ln(1-p)$

$$= \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t} \right)^r,$$

(B₂) Usamos la función cumulante $\Psi_X(t) = \ln m_X(t) = r \ln p - r \ln(1-(1-p)e^t)$ y (Ψ_2) del Teorema 3.5

$$\Psi'_X(t) = \frac{r(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} \Big|_{t=0} = \frac{r(1-p)}{p} = \mathbb{E}[X]$$

(B₃) Derivando de nuevo y evaluando en $t = 0$:

$$\Psi''_X(t) = \frac{r(1-p)e^t[1-(1-p)e^t] + r(1-p)^2 e^{2t}}{[1-(1-p)e^t]^2} \Rightarrow \Psi''_X(0) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \text{Var}[X]$$

\therefore Teorema 4.13 es cierto. □

Definición 4.7 (Distribución Hipergeométrica). Una VA X es hipergeométrica con parámetros $N, K, n \in \mathbb{N}$ tales que $K \leq N$ y $n \leq N$

$$X \sim \text{HGeom}(N, K, n)$$

si y solo si su PMF es la siguiente

$$P(X = k) = \text{HGeom}(k; N, K, n) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n - N + K) \leq k \leq \min(n, K)$$

donde X cuenta el número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n tomada sin reemplazo de una población de tamaño N con K elementos exitosos.

Teorema 4.14 (PMF de Hipergeométrica). Sea $X \sim \text{HGeom}(N, K, n)$ su PMF $f(k)$ cumple

(H₁) $\forall k \in [\max(0, n - N + K), \min(n, K)] \Rightarrow f(k) \geq 0$

(H₂) $\sum_{k=\max(0, n-N+K)}^{\min(n, K)} f(k) = 1$

Proof. Veamos que el Teorema 4.14 es cierto.

(H₁) $f(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \geq 0$ pues todos los binomiales son no negativos.

(H₂) Notemos que, por el Teorema 1.3

$$\sum_{k=\max(0, n-N+K)}^{\min(n, K)} \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_k \binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k} = 1$$

\therefore el Teorema 4.14 es cierto. \square

Teorema 4.15 (Hipergeométrica). Sea $X \sim \text{HGeom}(N, K, n) \Rightarrow$

(H₁) $\mathbb{E}[X] = \frac{nK}{M}$ Esperanza

(H₂) $\text{Var}[X] = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1}$ Varianza

Proof. Sea $X \sim \text{HGeom}(N, K, n)$

(H₁) Sabemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Y como $x = 0$ no aporta nada, de la Definición 3.1

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^n x \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \frac{nK}{M} \sum_{x=1}^n \frac{\binom{K-1}{x-1} \binom{M-1-(K-1)}{n-1-(x-1)}}{\binom{M-1}{n-1}}$$

Y si $l = x - 1$, del Teorema 4.14 se tiene a la PMF

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{nK}{M}$$

(H_2) Para la varianza, usamos la [Definición 3.2](#) y que

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$$

Primero calculamos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X(X-1)] &= \frac{n(n-1)K(K-1)}{M(M-1)}. \\ \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = \frac{n(n-1)K(K-1)}{M(M-1)} + \frac{nK}{M}. \\ \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = n \frac{K}{M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) \frac{M-n}{M-1}.\end{aligned}$$

\therefore [Teorema 4.15](#) es cierto. □

4.2. Continuas

Definición 4.8 (Distribución Uniforme Continua). Decimos que una VA X tiene distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$

$$X \sim \mathcal{U}(a, b)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \mathcal{U}(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$

Observación. Esta distribución modela espacios equiprobables que toman valores en un intervalo de longitud finita de \mathbb{R} , digamos en $I = (a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$

Teorema 4.16 (PDF de Uniforme Continua). Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ con $a < b$, su PDF $f(x)$ cumple

$$(\mathcal{U}_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(\mathcal{U}_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$$

Proof. Veamos que el [Teorema 4.16](#) es cierto.

$$(\mathcal{U}_1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \geq 0 \text{ pues es constante no negativa o cero.}$$

(\mathcal{U}_2) Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

\therefore el [Teorema 4.16](#) es cierto. □

Definición 4.9 (CDF Uniforme Continua). Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ con $a < b$. La CDF de X es

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Teorema 4.17 (Uniforme Continua). Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b) \Rightarrow$

$$(\mathcal{U}_1) \quad m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \quad t \neq 0 \quad \text{FGM}$$

$$(\mathcal{U}_2) \quad \mathbb{E}[X^r] = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)(b-a)} \quad \text{r-ésimo momento}$$

$$(\mathcal{U}_3) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{Esperanza}$$

$$(\mathcal{U}_4) \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

(\mathcal{U}_1) Sea $t \neq 0$. Usamos la definición de función generadora de momentos:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_a^b = \frac{1}{t(b-a)} (e^{bt} - e^{at}) \end{aligned}$$

(\mathcal{U}_2) Sea $r \in \mathbb{N}$, usamos la definición de esperanza para funciones continuas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^r] &= \int_a^b x^r \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^r dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_a^b \\ &= \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)(b-a)} \end{aligned}$$

(\mathcal{U}_3) Para la esperanza, tomamos $r = 1$ en el resultado anterior:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

(\mathcal{U}_4) Para la varianza, usamos que

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Tomamos $r = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \\ (\mathbb{E}[X])^2 &= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ \Rightarrow \text{Var}[X] &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

\therefore Teorema 4.17 es cierto. □

Definición 4.10 (Distribución Exponencial). Decimos que una VA X tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$

$$X \sim \exp(\lambda)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \exp(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Teorema 4.18 (PDF de Exponencial). Sea $X \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$, su PDF $f(x)$ cumple

$$(e_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(e_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$

Proof. Veamos que el Teorema 4.18 es cierto.

$$(e_1) \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \geq 0 \text{ pues } \lambda > 0 \text{ y la exponencial es positiva.}$$

(e₂) Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right] = \lambda \left[-0 + \frac{1}{\lambda} \right] = 1$$

\therefore el Teorema 4.18 es cierto. \square

Definición 4.11 (CDF Exponencial). Sea $X \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$. La CDF de X es

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema 4.19 (Exponencial). Sea $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow$

$$(e_1) \quad m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

FGM

$$(e_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Esperanza

$$(e_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Varianza

Proof. Sea $X \sim \exp(\lambda)$, es decir, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

(e₁) Tomamos la FGM, y para $t < \lambda$ s.t.q.

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

(e₂) Usamos la función $\Psi_X(t) = \ln m_X(t) = \ln \lambda - \ln(\lambda - t)$ y (Ψ_2) del Teorema 3.5

$$\Psi'_X(t) = \frac{1}{\lambda - t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}[X]$$

(e₃) Derivando de nuevo:

$$\Psi_X''(t) = \frac{1}{(\lambda - t)^2} \Rightarrow \Psi_X''(0) = \frac{1}{\lambda^2} = \text{Var}[X]$$

∴ Teorema 4.19 es cierto. □

Definición 4.12 (Función Gamma). Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Se define a la función Gamma como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Ejemplo 4.1. $\Gamma(1) = 1$

Proof.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt = 1$$

□

Teorema 4.20. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$

Proof. Nótese que

$$\Gamma(\alpha) + 1 = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = t^\alpha e^{-t} \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = 0 + \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

∴ $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ □

Corolario. $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$

Proof. Suponemos que se cumple para $\alpha = k$ i.e. $\Gamma(k + 1) = k!$

$$\begin{aligned} \Gamma(k + 1 + 1) &= \int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} dt \\ &= t^{k+1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (k + 1) \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = (k + 1) \Gamma(k + 1) = (k + 1) k! = (k + 1)! \end{aligned}$$

∴ $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ □

Teorema 4.21. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Proof. Sea $c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$. Ahora tomamos $u^2 = t$ y $2u du = dt$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du \Rightarrow c = 2 \int_0^\infty u \frac{e^{-u^2}}{u} du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Notemos que

$$c \cdot c = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_0^\infty e^{-v^2} dv$$

Por el Teorema de Fubini

$$4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

Sea $u = r \cos \theta$ y $v = r \sin \theta$

$$\begin{aligned} [\mathbb{J}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \\ \Rightarrow 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta}) r d\theta dr &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= 4 \int_0^\infty r e^{-r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) dr = 4 \frac{\pi}{2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \end{aligned}$$

Sea $w = r^2$ y $dw = 2r dr$

$$= \frac{2\pi}{2} \int_0^\infty e^{-w} dw = \pi \int_0^\infty e^{-w} dw = \pi \Rightarrow c^2 = \pi \Rightarrow c = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

□

Definición 4.13 (Distribución Gamma). Decimos que una VA X tiene distribución Gamma con parámetros $r > 0$ y $\lambda > 0$

$$X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \text{Gamma}(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

donde $r, \lambda \in \mathbb{R}^+$ y $\Gamma(r)$ es la [Definición 4.12](#).

Teorema 4.22 (PDF de Gamma). Sea $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ con $r, \lambda \in \mathbb{R}^+$, su PDF $f(x)$ cumple

$$(\Gamma_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(\Gamma_2) \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = 1$$

Proof. Veamos que el [Teorema 4.22](#) es cierto.

$$(\Gamma_1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \geq 0$$

Esto como todos los factores son no negativos para $x > 0$.

(Γ_2) Notemos que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty x^{r-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Sea $u = \lambda x$ y $dx = \frac{1}{\lambda} du$

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{r-1} e^{-u} \cdot \frac{1}{\lambda} du = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \frac{1}{\lambda^r} \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u} du = 1.$$

\therefore el [Teorema 4.22](#) es cierto.

□

Observación. Esta distribución tiene usos importantes en la econometría.

Definición 4.14 (CDF Gamma). Sea $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ con $r > 0$ y $\lambda > 0$. La CDF de X es

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda t} dt, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema 4.23 (Gamma). Sea $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda) \Rightarrow$

$$(\Gamma_1) \quad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^r \quad t < \lambda \quad \text{FGM}$$

$$(\Gamma_2) \quad \mathbb{E}[X^n] = \frac{\Gamma(r+n)}{\lambda^n \Gamma(r)} \quad n\text{-ésimo momento}$$

$$(\Gamma_3) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{r}{\lambda} \quad \text{Esperanza}$$

$$(\Gamma_4) \quad \text{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$

(Γ_1) Sea $t < \lambda$. Por definición de función generadora de momentos:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \frac{\Gamma(r)}{(\lambda-t)^r} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^r \end{aligned}$$

(Γ_2) Para $n \in \mathbb{N}$ usamos la definición de momento:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty x^n \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{n+r-1} e^{-\lambda x} dx$$

Hacemos el cambio $u = \lambda x$, $du = \lambda dx$, $x = u/\lambda$:

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda} \right)^{n+r-1} e^{-u} \cdot \frac{1}{\lambda} du = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot \frac{1}{\lambda^{n+r}} \int_0^\infty u^{n+r-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^n \Gamma(r)} \end{aligned}$$

(Γ_3) Para la esperanza, tomamos $n = 1$:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda \Gamma(r)} = \frac{r \Gamma(r)}{\lambda \Gamma(r)} = \frac{r}{\lambda}$$

(Γ_4) Para la varianza usamos que $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ y tomamos $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^2 \Gamma(r)} = \frac{(r+1)r \Gamma(r)}{\lambda^2 \Gamma(r)} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2} \\ (\mathbb{E}[X])^2 &= \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 = \frac{r^2}{\lambda^2} \\ \Rightarrow \text{Var}[X] &= \frac{r(r+1)}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2} \end{aligned}$$

\therefore Teorema 4.23 es cierto. □

Observación. Notemos que si $r = 1 \Rightarrow X \sim \text{Gamma}(1, \lambda) = X \sim \exp(\lambda)$

Ejemplo 4.2 (Erlang). Si $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ con $r \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$

$$X \sim \text{Erlang}(r, \lambda)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \text{Erlang}(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

donde se usa que $\Gamma(r) = (r-1)!$ cuando $r \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 4.3 (Distribución Ji-Cuadrada). Si $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ con $r = \frac{k}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow X$ tiene una distribución Ji-Cuadrada con k grados de libertad

$$X \sim \chi^2(k)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \chi^2(x; k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+$ representa el número de grados de libertad.

Proof. Sea $r = \frac{k}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$

Heredamos de [Teorema 4.22](#) las pruebas de la PDF y de [Teorema 4.23](#) podemos sacar

$$(\chi_1) \quad m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^r \quad t < \lambda = \frac{1}{2} = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \right)^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{1-2t}^{\frac{k}{2}} = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

$$(\chi_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{r}{\lambda} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k$$

$$(\chi_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}^2} = 2k$$

\therefore la Ji-Cuadrada es una distribución. □

Definición 4.15 (Función Beta). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Se define a la función Beta como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du$$

Teorema 4.24. La relación entre la Función Gama y Beta es la siguiente

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

Proof. Consideramos el cambio de variable en la integral doble de dos funciones Gamma

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy = \iint_{\mathbb{R}_+^2} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-(x+y)} dx dy$$

Sea $u = x + y$ y $t = \frac{x}{x+y} \Rightarrow x = ut$ y $y = u(1-t)$

El jacobiano de esta transformación es $[J] = u$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \iint_{u>0, t \in (0,1)} (ut)^{\alpha-1} (u(1-t))^{\beta-1} e^{-u} u \, dt \, du \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \, dt \cdot \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} \, du = B(\alpha, \beta) \cdot \Gamma(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Luego,

$$\Rightarrow B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

∴ el teorema es cierto. \square

Definición 4.16 (Distribución Beta). Decimos que una VA X tiene distribución Beta con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \text{Beta}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0, 1)$$

donde $B(\alpha, \beta)$ es la Definición 4.15 y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Teorema 4.25 (PDF de Beta). Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, su PDF $f(x)$ cumple

$$(B_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(B_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx = 1$$

Proof. Veamos que el Teorema 4.25 es cierto.

$$(B_1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases} \geq 0$$

Esto ya que todos los factores son no negativos para $x \in (0, 1)$ y $\alpha, \beta > 0$.

(B₂) Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot B(\alpha, \beta) = 1.$$

∴ el Teorema 4.25 es cierto. \square

Definición 4.17 (CDF Beta). Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. La CDF de X es

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{B(x; \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = I_x(\alpha, \beta)$$

Teorema 4.26 (Beta). Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$$(B_1) \quad \mathbb{E}[X^r] = \frac{B(\alpha+r, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \prod_{r=0}^{n-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r} \quad \text{r-ésimo momento}$$

$$(B_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{Esperanza}$$

$$(B_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$

(B₁) Para $r \in \mathbb{N}$, usamos la definición del momento:

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^1 x^r \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dx = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{r+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(\alpha+r, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$$

(B₂) Para la esperanza tomamos $r = 1$:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

(B₃) Para la varianza usamos $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ con $r = 2$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{B(\alpha+2, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$(\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

\therefore el Teorema 4.26 es cierto. \square

Definición 4.18 (Distribución Pareto). Decimos que una VA X tiene distribución Pareto con parámetros $\alpha > 0$ y $\theta > 0$

$$X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \text{Pareto}(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{\{x \geq \theta\}}$$

donde α es el parámetro de forma y θ el parámetro de escala.

Teorema 4.27 (PDF de Pareto). Sea $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$ con $\alpha, \theta \in \mathbb{R}^+$, su PDF $f(x)$ cumple

$$(P_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(P_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = 1$$

Proof. Veamos que el Teorema 4.27 es cierto.

$$(P_1) \quad f(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{I}_{\{x \geq \theta\}} \geq 0 \text{ ya que } \alpha, \theta > 0 \text{ y } x^{\alpha+1} > 0 \text{ para } x \geq \theta.$$

(P₂) Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha\theta^\alpha \int_{\theta}^{\infty} x^{-\alpha-1} dx.$$

Como $\alpha > 0$, la integral converge:

$$\alpha\theta^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{\theta}^{\infty} = \alpha\theta^\alpha \cdot \left(0 - \frac{\theta^{-\alpha}}{-\alpha} \right) = 1.$$

\therefore el Teorema 4.27 es cierto. \square

Definición 4.19 (CDF Pareto). Sea $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$ con $\alpha > 0$ y $\theta > 0$. La CDF de X es

$$F(x; \alpha, \theta) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq \theta$$

Teorema 4.28 (Pareto). Sea $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$ con $\alpha, \theta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$$(P_1) \quad \mathbb{E}[X^r] = \frac{\alpha\theta^r}{\alpha-r} \quad r < \alpha \quad \text{r-ésimo momento}$$

$$(P_2) \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1} \quad \alpha > 1 \quad \text{Esperanza}$$

$$(P_3) \quad \text{Var}[X] = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \alpha > 2 \quad \text{Varianza}$$

Proof. Sea $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$

(P₁) Para $r < \alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^r] &= \int_{\theta}^{\infty} x^r \cdot \alpha\theta^\alpha x^{-\alpha-1} dx = \alpha\theta^\alpha \int_{\theta}^{\infty} x^{r-\alpha-1} dx \\ &= \alpha\theta^\alpha \cdot \left[\frac{x^{r-\alpha}}{r-\alpha} \right]_{\theta}^{\infty} = \frac{\alpha\theta^\alpha}{\alpha-r} \cdot \theta^{r-\alpha} = \frac{\alpha\theta^r}{\alpha-r} \end{aligned}$$

(P₂) Para la esperanza tomamos $r = 1$, requiere $\alpha > 1$:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1}$$

(P₃) Para la varianza usamos que $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ y requiere $\alpha > 2$:

$$(\mathbb{E}[X])^2 = \left(\frac{\alpha\theta}{\alpha-1}\right)^2 \Rightarrow \text{Var}[X] = \frac{\alpha\theta^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2\theta^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

\therefore el Teorema 4.28 es cierto. \square

Definición 4.20 (Distribución Normal). Decimos que una VA X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 (es decir, de parámetros μ y σ)

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

si y solo si su PDF es la siguiente

$$f(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$

Teorema 4.29 (PDF de Normal). Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0 \Rightarrow$

$$(\mathcal{N}_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$(\mathcal{N}_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = 1$$

Proof. Veamos que el Teorema 4.29 es cierto.

(\mathcal{N}_1) Claramente $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que $\exp(z) > 0$ para todo z real y $\sigma > 0$.

(\mathcal{N}_2) Consideramos el cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma dz$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Definimos $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$. Entonces

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2+y^2)/2} dz dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Ahora usamos coordenadas polares: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\Rightarrow dx dy = r dr d\theta \text{ y } x^2 + y^2 = r^2$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta$$

Sea $u = \frac{r^2}{2} \Rightarrow du = r dr$, entonces

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} du\right) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta = 2\pi$$

Por tanto, $I = \sqrt{2\pi}$, así que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

\therefore el Teorema 4.29 es cierto. □

Definición 4.21 (CDF Normal). Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$. La CDF de X es

$$F(x; \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt$$

Teorema 4.30 (Normal). Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0 \Rightarrow$

(\mathcal{N}_1) $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

FGM

(\mathcal{N}_2) $\mathbb{E}[X] = \mu$

Esperanza

(\mathcal{N}_3) $\text{Var}[X] = \sigma^2$

Varianza

Proof. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

(\mathcal{N}_1) Calculemos la función generadora de momentos:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

completamos el cuadrado en el exponente,

$$\begin{aligned} tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left((x - \mu)^2 - 2\sigma^2 t(x - \mu) \right) + t\mu \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(x - \mu - \sigma^2 t \right)^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + t\mu \end{aligned}$$

Notemos que

$$m_X(t) = \frac{e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \mu - \sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Hacemos el cambio de variable $y = \frac{x - \mu - \sigma^2 t}{\sigma}$, entonces $dx = \sigma dy$ y

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

(\mathcal{N}_2) Usamos la función cumulante $\Psi_X(t) = \ln m_X(t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$ y (Ψ_2) del [Teorema 3.5](#)

$$\Psi'_X(t) = \mu + \sigma^2 t \mid_{t=0} = \mu = \mathbb{E}[X]$$

(\mathcal{N}_3) Derivando de nuevo y evaluando en $t = 0$:

$$\Psi''_X(t) = \sigma^2 \Rightarrow \Psi''_X(0) = \sigma^2 = \text{Var}[X]$$

\therefore [Teorema 4.30](#) es cierto. □

Observación. La normal (μ, σ^2) cumple $\mathbb{E}[X] = \text{Mo} = \text{Me}$

Teorema 4.31. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sea $a, b \neq 0 \in \mathbb{R}$. Sea $Y = aX + b$.

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Proof. Como $m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \mathbb{E}[e^{tX}]$ sustituyamos por Y

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{t(aX+b)}] = e^{tb} \mathbb{E}[e^{taX}] \\ e^{tb} \left(e^{\mu at + \frac{\sigma^2 a^2 t^2}{2}} \right) &= e^{\mu at + tb + \frac{\sigma^2 a^2 t^2}{2}} = e^{(\mu a + b)t + \frac{\sigma^2 a^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

$\therefore Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ □

Corolario. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = X - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Teorema 4.32. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y $Y = X - \mu$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y^r] = \mathbb{E}[(X - \mu)^r] = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es impar} \\ \frac{2k! \sigma^{2k}}{k! 2^k} & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

Proof. Caso 1: r es impar

$$\mathbb{E}[Y^r] = \int_{-\infty}^{\infty} y^r \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi} \cdot \sigma} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^r \exp \left[-\frac{y^2}{2r^2} \right] dy = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi} \cdot \sigma} \lim_{t \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Caso 2: r es par

Recordemos que

$$m_Y(t) = 1 + t\mathbb{E}[Y] + \frac{t^2}{2!}\mathbb{E}[Y^2] + \frac{t^3}{3!}\mathbb{E}[Y^3] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}\mathbb{E}[Y^{2k}]}{2k!}$$

Por otro lado si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow$

$$m_Y(t) = \exp \left[\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k} t^{2k}}{k! 2^k}$$

Estas dos ecuaciones son iguales si los coeficientes de t^{2k} i.e.

$$\frac{\mathbb{E}[Y^{2k}]}{2k!} = \frac{\sigma^{2k}}{k! 2^k}$$

Despejando a $\mathbb{E}[Y^{2k}]$ s.t.q.

$$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{2k! \sigma^{2k}}{k! 2^k}$$

\therefore el Teorema 4.32 es cierto. □

Corolario. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ el coeficiente de asimetría $\alpha = 0$ y de kurtosis $\mathcal{K} = 3$

Proof. Por el Teorema 4.32, como 3 es impar

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mathbb{E}[Y^3]}{\sigma^3} = 0$$

Ahora, como 4 es par

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}[Y^4]}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}[Y^{2 \cdot 2}]}{\sigma^4} = \\ &= \frac{4! \sigma^4}{2! 2^2 \sigma^4} = \frac{24}{8} = 3 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.4 (Distribución Normal Estandar). Decimos que una VA X tiene distribución normal estandarizada si sigue la Definición 4.20 con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

es decir, su PDF es

$$\varphi(x) = \mathcal{N}(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$$

La CDF se denota como

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

Proof. Todas las propiedades de la PDF se heredan del Teorema 4.29. □

Teorema 4.33 (Teorema de la Transformación). Sea X una VA continua con densidad $f_X(x)$ y soporte S . Sea $Y = g(X)$, con $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ continua, biyectiva y derivable, con inversa $x = g^{\leftarrow}(y)$ tal que $\frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \neq 0$.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \right| f_X(g^{\leftarrow}(y)) \mathbb{I}_{S^*}(y)$$

donde $S^* = g(S)$ es el soporte de Y .

Proof. Caso 1:

Supongamos que $y = g(x)$ es monótona creciente. En ese caso

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y) = P(X \leq g^{\leftarrow}(y)) = F_X(g^{\leftarrow}(y))$$

Como g es continua, derivable, y biyectiva \Rightarrow

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{\leftarrow}(y)) = f_X(g^{\leftarrow}(y)) \frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \\ \Rightarrow f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \right| f_X(g^{\leftarrow}(y)) \mathbb{I}_{S^*}(y) \end{aligned}$$

Caso 2:

Supongamos que $y = g(x)$ es monótona decreciente. En ese caso

$$F_X(y) = P(Y \leq y) = P(g(x) \leq y) = P(X \geq g^{\leftarrow}(y)) = 1 - F_X(g^{\leftarrow}(y))$$

Esto como $g(x)$ es monótona decreciente. Luego

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}[1 - F_X(g^{\leftarrow}(y))] = -f_X(g^{\leftarrow}(y)) \frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \\ \Rightarrow f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy}g^{\leftarrow}(y) \right| f_X(g^{\leftarrow}(y)) \mathbb{I}_{S^*}(y) \end{aligned}$$

\therefore el Teorema 4.33 es cierto. □

Ejemplo 4.5 (Distribución Log-Normal). Decimos que una VA X tiene distribución Log-Normal si $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, es decir,

$$X \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Entonces, su PDF es

$$f(x) = \log \mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x > 0$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ son los parámetros de la normal subyacente.

Proof. Sea $Y = \log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Usamos el Teorema 4.33 con $X = e^Y \Rightarrow Y = \log X$, que es biyectiva, continua y derivable.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_X(x) &= \left| \frac{d}{dx} \log x \right| \cdot f_Y(\log x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x > 0 \end{aligned}$$

Además, del [Teorema 4.30](#) podemos obtener:

$$(L_1) \quad m_X(t) = \mathbb{E}[e^t X] = e^{r\mu + \frac{\sigma^2}{2} r^2}$$

$$(L_2) \quad \mathbb{E}[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$(L_3) \quad \text{Var}[X] = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}$$

\therefore la Log-Normal es una distribución. □

Capítulo 5

Teoremas de Límite

5.1. De Moivre-Laplace

Notación. Denotamos $\theta(n)$ a una función tal que $\theta(x) \rightarrow 0$ rápidamente cuando $n \rightarrow 0$.

Teorema 5.1 (Teorema de De Moivre–Laplace). Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$ con $p \neq 0$ o 1

Cuando $n \rightarrow \infty$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = npq)$$

Es decir, para k en un entorno de np , se puede aproximar

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right), \quad p + q = 1, \quad p, q > 0.$$

Proof. Notemos que esto es equivalente a demostrar que $Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Busquemos la FGM de Z

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \exp\left(\frac{-npt}{\sqrt{npq}}\right) \cdot m_X\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right) = \exp\left(\frac{-npt}{\sqrt{npq}}\right) \left(q + p \cdot \exp\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)\right)^n \\ &= \left(\exp\left(\frac{-pt}{\sqrt{npq}}\right) \left(q + p \cdot \exp\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)\right)\right)^n = \left(q \cdot \exp\left(\frac{-pt}{\sqrt{npq}}\right) + p \cdot \left(\exp\left(\frac{t - pt}{\sqrt{npq}}\right)\right)\right)^n \\ &= \left(q \cdot \exp\left(\frac{-pt}{\sqrt{npq}}\right) + p \cdot \exp\left(\frac{tq}{\sqrt{npq}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!}$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{-pt}{\sqrt{npq}}\right) = 1 - \frac{pt}{\sqrt{npq}} + \underbrace{\frac{p^2 t^2}{\sqrt{2npq}} - \frac{p^3 t^3}{\sqrt{3npq}} + \dots}_{\theta(n) \rightarrow 0}$$

$$q \cdot e^{\frac{-pt}{\sqrt{npq}}} = q - \frac{qpt}{\sqrt{npq}} + \frac{qp^2 t^2}{\sqrt{2npq}} + \theta(n) \quad \text{y} \quad q \cdot e^{\frac{-pt}{\sqrt{npq}}} = p - \frac{qpt}{\sqrt{npq}} + \frac{pq^2 t^2}{\sqrt{2npq}} + \theta(n)$$

Sumando las dos expresiones s.t.q.

$$= \underbrace{q}_{1-p} + p - \frac{qpt}{\sqrt{npq}} + \frac{qpt}{\sqrt{npq}} + \frac{pt^2}{2n} + \frac{qt^2}{2n} + \theta(n)$$

Sustituyendo en la FGM de Z

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= \left[q \cdot e^{\frac{-pt}{\sqrt{npq}}} + p \cdot e^{\frac{tq}{\sqrt{npq}}} \right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \theta(n) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \theta(n) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t^2}{2n} \right]^n = e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

Y recordamos del [Ejemplo 4.4](#) que esto es la FGM $\sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$$

$\therefore X \sim \mathcal{N}(np, npq)$

□

5.2. Desigualdades

Teorema 5.2 (Desigualdad de Markov). Sea X una VA no negativa con media finita y $t > 0$

$$\Rightarrow P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Proof. Recordemos de la [Definición 3.1](#) que

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Con $t > 0$ s.t.q

$$\begin{aligned} \int_{x \geq t} x f_X(x) dx + \int_{x < t} x f_X(x) dx &\geq \int_{x \geq t} x f_X(x) dx \\ &\Rightarrow \underbrace{x f_X(x)}_{x \geq t} \geq t f_X(x) \\ &\Rightarrow \int_{x \geq t} x f_X(x) dx \geq \int_{x \geq t} t f_X(x) dx = \int_t^{\infty} t f_X(x) dx \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq t \int_t^{\infty} f_X(x) dx \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq t P(X \geq t) \end{aligned}$$

$\therefore P(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$

□

Teorema 5.3 (Desigualdad de Tchebyshev). Sea X una VA con varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ y media μ . Sea $t > 0$

$$\Rightarrow P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

Proof. Sea $Y = (X - \mu)^2 \geq 0$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$$

Aplicando Teorema 5.2 con $t^2 > 0$

$$P(Y \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} \Leftrightarrow P((X - \mu)^2 \geq t^2) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

$$P(|X - \mu| \geq \frac{\sigma}{t})$$

\therefore es cierto el Teorema 5.3 □

Corolario. $P(|X - \mu| \leq t) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{t^2}$

Corolario. $P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(t\sigma)^2}$

Corolario. $P(|X - \mu| < t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$

Observación (Taylor). Si $f_X(x)$ es dos veces derivable en $c \Rightarrow$

$$f_X(x) = f(c) + \frac{f'(c)(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \dots$$

Por el Teorema de Valor Intermedio $\exists 0 < \varphi < c$ tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\varphi)(x-\varphi)}{2}$$

Teorema 5.4 (Desigualdad de Jensen). Sea X una VA con $\mathbb{E}[X] < \infty$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\mathbb{E}[g(X)] < \infty \Rightarrow$

(J₁) Si $g(x)$ es cóncava $\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$

(J₂) Si $g(x)$ es convexa $\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$

Proof. Aplicando Taylor con $g(x)$ alrededor de μ

$$g(X) = g(\mu) + \frac{g'(\xi)(x-\mu)}{1!} + \frac{g''(\xi)(x-\mu)^2}{2!}$$

Tomando $\mathbb{E}[\cdot]$ de ambos lados

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(\mu)] + \underbrace{g'(\mu)(x-\mu)}_{=0} + \frac{g''(\xi)}{2!} \mathbb{E}[(x-\xi)^2]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] = g(\mathbb{E}[X]) + \frac{g''(\xi)}{2!} \mathbb{E}[(x-\xi)^2]$$

Si g es cóncava $g''(\xi) > 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

Si g es convexa $g''(\xi) > 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$$

\therefore el Teorema 5.6 es cierto. □

Corolario. Sea X una VA con media $\mathbb{E}[X] < \infty$ y $g(X) = X^2$

$$\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}^2[X] \geq 0$$

Teorema 5.5 (Desigualdad de Chernoff). Sea X una variable aleatoria y $t > 0$

$$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow P(X \geq a) \leq e^{-ta} \mathbb{E} \left[e^{tX} \right]$$

Esta cota es válida siempre que $\mathbb{E} \left[e^{tX} \right] < \infty$. De manera análoga, si $t < 0$,

$$P(X \leq a) \leq e^{-ta} \mathbb{E} \left[e^{tX} \right]$$

5.3. LGN y TCL

Definición 5.1 (Convergencia Puntual). Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Diremos que la sucesión de VA (que son funciones) X_n converge puntualmente a X si

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1$$

Definición 5.2 (Convergencia de Probabilidad). Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Diremos que la sucesión de VA X_n converge a la VA X si $\forall \varepsilon > 0$ s.t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

i.e. cuando $n \rightarrow \infty$ la probabilidad de que la sucesión de VA X_n este *lejos* de X es nula.

Notación. Podemos denotar la convergencia en probabilidad como $X_n \xrightarrow{P} X$

Teorema 5.6 (Ley de Kolmogorov). La media muestral \bar{X}_n converge puntualmente a la esperanza, o media poblacional $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$. Recordando que las VA son funciones de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Cuando $n \rightarrow \infty$

$$\forall s \in \Omega \Rightarrow \bar{X}_n(s) \rightarrow \mu$$

Es decir

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu \right) = 1$$

Teorema 5.7 (Ley de Khinchin). Cuando $n \rightarrow \infty$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Es decir, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \bar{X}_n - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0$$

Proof. Usamos el Teorema 5.3. Supongamos un $\varepsilon > 0$ fijo pero arbitrario

$$P \left(\left| \bar{X}_n - \mu \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ el lado derecho tiende a cero. □

Notación. Nos referimos al Teorema 5.6 como la Ley de Grandes Números (LGN) fuerte al Teorema 5.7 como la LGN débil.

Teorema 5.8 (Teorema Central del Límite). Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio muestral. Supongamos que tenemos $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{F} \subseteq \Omega$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media poblacional μ y varianza σ^2 , y media muestral \bar{X}_n

Cuando $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Observación. Es decir, cuando n se hace muy muy muy pero muy muy grande, al hacer la estandarización de la distribución de la VA \bar{X}_n se acerca a una distribución normal estándar.

Teorema 5.9 (Aprox. de TCL). Para grandes n , la distribución de \bar{X}_n es aproximadamente

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Lema 5.1 (Lema de Borel-Cantelli). Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de eventos en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .

(B₁) Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$$

es decir, la probabilidad de que ocurran infinitos A_n es cero.

(B₂) Si los eventos A_n son independientes y $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, entonces

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$$

es decir, ocurren infinitos A_n casi seguramente.

Definición 5.3 (Función Característica). Sea X una variable aleatoria con distribución en \mathbb{R}^n . La función característica de X es la función $\varphi_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X \rangle}\right]$$

donde $\langle t, X \rangle$ denota el producto interno usual en \mathbb{R}^n e $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 5.10 (Teorema de Continuidad de Lévy). Sea $(X_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias con funciones características φ_{X_n} , y sea X una variable aleatoria con función característica φ_X . Entonces,

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$$

Es decir, la convergencia en distribución de X_n a X es equivalente a la convergencia puntual de sus funciones características.